Índice general

Capítulo 1

Conjuntos

En este primer capítulo se dan las principales definiciones y resultados concernientes a *conjuntos* el cual serán usados en este curso.

1.1. Operaciones con conjuntos

La unión y la intersección de dos conjuntos A y B serán denotados, respectivamente, por $A \cup B$ y $A \cap B$. Estas notaciones son extendidas de manera obvia a la unión y la intersección de una *familia* de conjuntos A_i ($i \in T$), donde T es un conjunto no vacío de índices (los conjuntos de índices se supondrán no vacíos). Denotaremos a dicha familia por $\{A_i\}_{i \in T}$. Así, la unión de la familia $\{A_i\}_{i \in T}$ será denotado por $\cup_{i \in T} A_i$ (también emplearemos la notación $\cup_i A_i$, ó incluso $\cup A_i$ si no hay posibilidad de confusión), y similarmente para la intersección. Con mayor precisión

$$\cup_{i \in T} A_i = \{\omega : \omega \in A_i \text{ para algún } i \in T\},$$

es decir, el conjunto de aquellos elementos ω tal que ω pertenece a A_i para al menos un índice i perteneciente a T, y

$$\cap_{i \in T} A_i = \{\omega : \omega \in A_i \text{ para todo } i \in T\}.$$

Para cualesquiera dos conjuntos A y B, el nuevo conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen a A pero no a B, se denotará como $A - B$, i.e.,

$$A - B := \{\omega : \omega \in A \text{ y } \omega \notin B\}.$$

En particular, si todos los conjuntos bajo consideración son vistos como subconjuntos de algún *espacio* Ω (un conjunto fijo no-vacío, llamado *conjunto universal*), entonces el *complemento de* A se define como $\Omega - A$, y será denotado por A^c. De aquí se tiene que $A - B = A \cap B^c$. El conjunto vacío será denotado por $\emptyset$.

Denotaremos a los conjuntos por mayúsculas en itálica A, B, $C \cdots$. Sin embargo reservaremos la notación P sólo para una medida de probabilidad, y X, Y, Z denotarán variables aleatorias (vv.aa). Como siempre, denotaremos al conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$, al subconjunto de los naturales por $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$. También denotamos por $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, por $\mathbb{Z}$ al conjunto de todos los enteros, por $\mathbb{Q}$ el campo de los racionales, y por $\mathbb{C}$ el campo de los complejos.

Definición 1.1.1. *Diremos que una familia* $\{A_i\}_{i \in T}$ *de conjuntos es una* familia disjunta *si*

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i, j \in T, i \neq j.$$

En este caso, la unión de esta familia se representará con un puntito arriba del símbolo de "unión":

$$\dot{\cup}_{i \in T} A_i \qquad \textit{(unión disjunta.)}$$

Sean Ω_1, Ω_2 dos conjuntos no vacíos. Definimos el *producto cartesiano* de Ω_1 con Ω_2 como el conjunto de todos los pares ordenados teniendo como primer elemento un elemento de Ω_1, y como segundo elemento un elemento de Ω_2, y lo denotaremos como $\Omega_1 \times \Omega_2$. Así,

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\}.$$

Similarmente, productos cartesianos mayores son definidos:

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha = \{(\omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : \omega_\alpha \in \Omega_\alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda\},$$

Enunciamos el siguiente axioma de la teoría de conjuntos:

Axioma de elección. Sea $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos ($\Omega_\alpha \neq \emptyset$ for all $\alpha \in \Lambda$). Entonces su producto cartesiano es también no vacío $\prod_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha \neq \emptyset$. Esto es, es posible "escoger" un elemento simultáneamente de cada uno de los conjuntos no vacíos Ω_α.

1.2. Conjuntos numerables y a lo sumo numerables

Definición 1.2.1. *Sean A, B dos conjuntos. Diremos que A es* equipotente *a B y se escribe $A \sim B$ si existe una biyección $f : A \to B$ de A sobre B.*

Observación 1.2.2. *Sean A, B, C conjuntos. Claramente se tiene que:*

- *$A \sim A$;*
- *Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$;*
- *Si $A \sim B$, $B \sim C$, entonces $A \sim C$.*

Definición 1.2.3. *Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Se define el* intervalo entero *$[a\,..\,b]$ de $\mathbb{N}$ por*

$$[a\,..\,b] := \{n \in \mathbb{N} : a \leq n \leq b\}.$$

Definición 1.2.4. *Un conjunto A se dice* conjunto finito *si ó bien $A = \emptyset$, ó bien $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim [1\,..\,n]$ (equiv. $[1\,..\,n] \sim A$).*

Teorema 1.2.5. *Sean A, B conjuntos, $A \subset B$, $A \neq B$ (A se dice* subconjunto propio *de B). Si A es finito entonces A no es equipotente a B.*

Demostración. Si $A = \emptyset$, la afirmación es clara, pues no puede existir una función $\varphi : A \to B$, con dominio el conjunto vacío.

Supongamos ahora que $A \neq \emptyset$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim [1\,..\,n]$, o sea, existe una biyección φ de $[1\,..\,n]$ sobre A. También por hipótesis existe $b \in B$ tal que $b \notin A$. Probaremos el teorema por inducción sobre $\underline{n}$.

Caso $n = 1$: En este caso $A = \{\varphi(1)\}$. Supongamos que hubiera una biyección $f : A \to B$, de A sobre B. Puesto que f es suprayectiva y $\varphi(1) \in B$, se tendría necesariamente que $f(\varphi(1)) = \varphi(1) \neq b$. Luego no existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$, contradiciendo la suprayectividad de f. El teorema es correcto en este caso.

Caso $n \geq 2$: Supongamos ya probado el teorema para n, y supongamos además que $A \sim [1\,..\,n+1]$, con $\varphi : [1\,..\,n+1] \to A$ una biyección, de donde $A = \{\varphi(1), \cdots, \varphi(n+1)\}$.

Razonando por contradicción, supongamos que si existe una biyección f de A sobre B. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(\varphi(n+1)) =$

$b \in B - A$, $\Big($pues si no fuera así podemos construir una nueva biyección $f^* : A \to B$ como sigue:

Sea $p \in [1\,..\,n{+}1]$ tal que $f(\varphi(p)) = b \in B{-}A$, y sea $c := f(\varphi(n{+}1)) \in B$.

Definamos $f^* : A \to B$ como sigue:

$$f^*(\varphi(k)) = \begin{cases} f(\varphi(k)) & \text{si} \quad k \neq p, n+1; \\ c & \text{si} \quad k = p; \\ b & \text{si} \quad k = n+1. \end{cases}$$

Claramente f^* es también una biyección de A sobre B tal que $f^*(\varphi(n{+}1)) = b \in B - A\Big)$.

Así pues, sin pérdida de generalidad, supongamos que f es una biyección de A sobre B tal que $f(\varphi(n+1)) = b \in B - A$. Por lo tanto, la restricción de f a $A - \{\varphi(n+1)\} = \{\varphi(1), \cdots, \varphi(n)\}$ es una biyección de $A' = A - \{\varphi(n+1)\}(\sim [1\,..\,n])$ sobre $B' = B - b$, con $A' \subset B'$, de tal forma que $\varphi(n+1) \in B' - A'$, es decir, $A' \sim [1\,..\,n]$ es un subconjuto propio de B', tal que A' es equipotente a B'. Tenemos aquí una contradicción con nuestra hipótesis de inducción. Así pues, tal f no puede existir.

La demostración por inducción está completa. $\square$

Definición 1.2.6. *Un conjunto que no es finito se llama* infinito.

Consecuencias del teorema 1.2.5 :

(a) Si A es un conjunto equipotente a un intervalo entero $[1\,..\,n]$ de $\mathbb{N}$ (luego A es un conjunto finito), dicho n es único y se llama *número cardinal* de A y se designa por $Card(A)$. Convenimos en poner $Card(\emptyset) = 0$.

Dem. En efecto, supongamos que $A \sim [1\,..\,n]$ y $A \sim [1\,..\,m]$, con $m < n$. De aquí resultaría que $[1\,..\,m] \sim [1\,..\,n]$. Pero $[1\,..\,m]$ es una parte finita propia de $[1\,..\,n]$, lo cual no puede ser pues contradice el teorema 1.2.5. $\blacksquare$

(b) $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Dem. En efecto, si $\mathbb{N}$ fuese finito, entonces $\mathbb{N}$ sería equipotente a una parte finita propia $[1\,..\,n]$, hecho que contradice al teorema 1.2.5. $\blacksquare$

Teorema 1.2.7. *Todo subconjunto de un conjunto finito es finito, y el cardinal es inferior o igual al cardinal del conjunto entero.*

Demostración. Sea B un conjunto finito y A una parte de B. Sin pérdida de generalidad, supongamos de $B = [1\,..\,n]$. Si $A = \emptyset$, entonces A es finito y $Card(A) = 0 < Card(B) = n$.

Supongamos que $A \neq \emptyset$, y hagamos la demostración por inducción sobre la cardinalidad n de B.

Caso $n = 1$**:** Entonces $B = \{1\}$, y como $A \neq \emptyset$, por lo tanto, $A = \{1\} = B$, y el resultado es claro.

Caso $n \geq 2$**:** Supongamos el teorema ya probado para n. Probemos el caso $n + 1$, $B = [1\,..\,n + 1]$.

(i) Supongamos que $n + 1 \notin A$, y como $A \subset B = [1\,..\,n + 1]$, se tiene que $A \subset B' := B - \{n + 1\} = [1\,..\,n]$ y por hipótesis de inducción A es finito con $Card(A) \leq Card(B') = n < n + 1 = Card(B)$.

(ii) Supongamos ahora que $n+1 \in A$, y como $A \subset B = [1\,..\,n+1]$, se tiene que $A' := A - \{n + 1\} \subset B' := B - \{n + 1\} = [1\,..\,n]$. Por hipótesis de inducción A' es finito con $Card(A') = p \leq Card(B') = n < n + 1 = Card(B)$.

Si $p = 0$ entonces $A = \{n + 1\}$ y $Card(A) = 1 < Card(B) = n + 1$.

Si $p \neq 0$, entonces existe una biyección $\varphi : A' = A - \{n + 1\} \to [1\,..\,p]$. Ampliamos φ a todo A definiendo $\varphi(n + 1) = p + 1$. Claramente, φ ampliada es una biyección de A sobre $[1\,..\,p + 1]$, de donde A es finito con $Card(A) = p + 1 \leq n + 1 = Card(B)$.

Así, la demostración por inducción está completa. □

Consecuencia de los teoremas 1.2.5 y 1.2.7.

(i) Un conjunto finito no puede ser equipotente a una parte propia. Equivalentemente, si un conjunto es equipotente a una parte propia, entonces es infinito.

Dem. Sea B un conjunto finito. Por el teorema 1.2.7, todo subconjuto A de B es finito, pero por el teorema 1.2.5, si A es parte propia de B, entonces A no puede ser equipotente a B. ■

(ii) Otra forma de ver que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito:

Dem. Se sigue de (i) arriba, pues $\mathbb{N}$ si es equipotente a una parte propia, en este caso el conjunto de los pares $2\mathbb{N}$, a través de la biyección $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$. ■

(iii) Si B es un conjunto que contiene un subconjunto infinito, entonces B es también infinito.

Dem. Supongamos que A es una parte infinita de B. Si B fuese finito, por el teorema 1.2.7, A también sería finito, contradiciendo su infinitud.

(iv) Los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos infinitos.

Dem. Se sigue de (iii). ■

(v) Todo intervalo abierto acotado no vacío es infinito.

Dem. Sea (a, b) un intervalo abierto acotado no vacío, es decir $a < b$. Escojamos $\alpha, \beta \in (a, b)$ tal que $a < \alpha < \beta < b$. Entonces la aplicación

$$x \mapsto a + \left(\frac{b-a}{\beta-\alpha}\right)(x-\alpha)$$

es una biyección del intervalo (α, β) sobre el intervalo (a, b), es decir, (a, b) es equipotente a una parte propia. Por (i) arriba (a, b) es infinito. ■

Definición 1.2.8. *(a) Un conjunto se dice* numerable *si es equipotente al conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$.

(b) Un conjunto se dice a lo sumo numerable *si es finito ó numerable.*

Lema 1.2.9. *Sea* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una aplicación estrictamente creciente, es decir,* $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\varphi(n) \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. La demostración de hará por inducción sobre n. Se tiene claramente que $\varphi(1) \geq 1$ (pues 1 es el elemento mínimo de $\mathbb{N}$).

Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$ (hipótesis de inducción). Puesto que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, de donde $\varphi(n+1) - n \in \mathbb{N}$, es decir, $\varphi(n+1) - n \geq 1$, equivalentemente, $\varphi(n+1) \geq n+1$. Así, la prueba por inducción está completa. □

Recordemos el siguiente resultado de cálculo:

Teorema 1.2.10 (**Principio de buena ordenación (PBO)**). *Todo subconjunto no vacío de los naturales $\mathbb{N}$ posee un elemento mínimo.*

Este resultado lo usaremos para demostrar el siguiente:

Teorema 1.2.11. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable (finito ó numerable).*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supondremos que nuestro conjunto numerable es $\mathbb{N}$. Sea A una parte de $\mathbb{N}$. Si A es finito no hay nada que probar. Supongamos pues que A es una parte infinita de $\mathbb{N}$, debemos probar que A es numerable, es decir, vamos a probar que existe una biyección de $\mathbb{N}$ sobre A.

Vamos a definir inductivamente una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Gracias al PBO (teorema 1.2.10), A posee elemento mínimo, por lo que definimos

$$\varphi(1) := \text{elemento mínimo de } A = \text{mín}\, A.$$

Supongamos ya definido $\varphi(n)$ para algún n (hipótesis de inducción). Consideremos el conjunto:

$$\{k \in A : k > \varphi(n)\}.$$

Este conjunto es una parte no vacía de $\mathbb{N}$ (pues caso contrario, se tendría $\forall k \in A \Longrightarrow k \leq \varphi(n)$, es decir, A es un subconjunto del intervalo entero finito $[1 \mathinner{..} \varphi(n)]$, y por el teorema 1.2.7, A es un conjunto finito, lo que constituye una contradicción). Gracias al PBO, podemos definir

$$\varphi(n+1) := \text{mín}\{k \in A : k > \varphi(n)\}.$$

Así, tenemos φ definido inductivamente.

Por otro lado, por construcción, $\varphi : \mathbb{N} \to A$ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en A. Luego φ es <u>inyectiva</u>.

Vamos a probar ahora que φ es una aplicación <u>suprayectiva</u> de $\mathbb{N}$ sobre A. Tomemos un elemento arbitrario de A, digamos $a \in A$. Consideremos el conjunto

$$S := \{k \in \mathbb{N} : \varphi(k) \geq a\}.$$

Note que $S \neq \emptyset$. En efecto, como $\varphi : \mathbb{N} \to A \subset \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente, por el lema 1.2.9, se tiene que $\varphi(a) \geq a$, de donde $a \in S$. Una vez más, por el PBO (teorema 1.2.10), S posee un elemento mínimo. Definamos

$$m = \min S = \min\{k \in \mathbb{N} : \varphi(k) \geq a\}.$$

De aquí, como $m \in S$, se tiene que $\varphi(m) \geq a$. Distinguimos dos casos:

(i) Caso $m = 1$: Se tiene pues que $\varphi(m) = \varphi(1) = \min A \leq a$. Como $\varphi(m) = \varphi(1) \geq a$, de estas dos desigualdades se tiene que $\varphi(1) = a$.

(ii) Caso $m > 1$: Siendo $m = \min S$, entonces $m - 1 \in \mathbb{N} - S$, de donde $\varphi(m-1) < a$, y de la definición de $\varphi(m) = \min\{k \in A : k > \varphi(m-1)\}$, y estando a en el conjunto de la izquierda, $\varphi(m) \leq a$, de donde se tiene que $\varphi(m) = a$.

φ es pues suprayectiva, por lo tanto, φ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre A, de donde A es numerable. □

Teorema 1.2.12. *Sean A, B dos conjuntos, con A numerable. Supongamos que existe una aplicación suprayectiva de A sobre B. Entonces B es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A = \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe $f : \mathbb{N} \to B$ una aplicación suprayectiva. Dado $y \in B$ arbitrario, por ser f suprayectiva, el subconjunto de $\mathbb{N}$, $f^{-1}(\{y\}) := \{n \in \mathbb{N} : f(n) = y\}$ es no vacío. Gracias al PBO, podemos definir una aplicación $g : B \to \mathbb{N}$ poniendo:

$$g(y) := \min f^{-1}(\{y\}) = \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) = y\}.$$

Claramente $f \circ g = id_B$, con $id_B : B \to B$ la aplicación idéntica sobre B ($id_B(y) = y$ para todo $y \in B$). De aquí se sigue que $g : B \to \mathbb{N}$ es una aplicación inyectiva. En efecto, basta probar la implicación:

$$y_1, y_2 \in B, g(y_1) = g(y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2.$$

Sean $y_1, y_2 \in B$, tal que $g(y_1) = g(y_2)$, entonces $f(g(y_1)) = f(g(y_2))$, es decir, $(f \circ g)(y_1) = (f \circ g)(y_2)$, pero como $f \circ g = id_B$, se sigue inmediatamente que $y_1 = y_2$. Así pues, efectivamente $g : B \to \mathbb{N}$ es una aplicación inyectiva, de donde restringiendo el codominio de g al rango de g, tenemos que $g : B \to g(B)$ es una aplicación biyectiva de B sobre $g(B)$, con $g(B)$ un subconjunto de $\mathbb{N}$. Por el teorema 1.2.11, $g(B)$ es a lo sumo numerable, luego B es también a lo sumo numerable. □

Teorema 1.2.13. *El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Basta probar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Definimos una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por la fórmula

$$\varphi(m, n) = 2^{m-1} \cdot (2n - 1), \qquad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Afirmamos que $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es biyectiva:

(i) $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es suprayectiva: Sea $k \in \mathbb{N}$ un número natural arbitrario. Consideremos el subconjunto de los naturales

$$S := \{m \in \mathbb{N} : 2^m \nmid k \ (2^m \text{ no divide a } k)\}.$$

Dicho subconjunto es no vacío puesto que como $\lim_{m\to\infty} 2^m = \infty$, basta tomar m suficientemente grande tal que $2^m > k$, de donde $m \in S$. Por el PBO (teorema 1.2.10), S posee elemento mínimo. Sea $m_0 = \min S$. Consideramos los siguientes casos:

Caso $m_0 = 1$: Entonces 2 no divide a k, es decir, k es un número impar, luego existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2n_0 - 1 = 2^{1-1} \cdot (2n_0 - 1) = \varphi(1, n_0)$.

Caso $m_0 > 1$: Por la definición de m_0 como elemento mínimo de S, entonces $m_0 - 1$ es un natural que no pertenece a S, de donde 2^{m_0-1} divide a k pero $2^{m_0} \nmid k$. Por lo tanto existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que se tiene $k = 2^{m_0-1} \cdot k'$, con k' claramente un número impar. Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k' = 2n_0 - 1$, es decir, $k = 2^{m_0-1} \cdot (2n_0 - 1) = \varphi(m_0, n_0)$. Así, φ es suprayectiva.

(ii) $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva: Sean $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $\varphi(m.n) = \varphi(m', n')$, es decir, $2^{m-1} \cdot (2n - 1) = 2^{m'-1} \cdot (2n' - 1)$, equivalentemente, $2n - 1 = 2^{m'-m} \cdot (2n' - 1)$. Si $m' > m$, entonces se tiene un número que es par e impar a la vez, lo cual no puede ser. Luego $m = m'$ y de aquí $n = n'$, de donde la inyectividad de φ.

Así, (i) y (ii) prueban que $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$, es decir, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable. $\square$

Corolario 1.2.14 (**Generalización del teorema precedente**)**.** *Para cada $k \in \mathbb{N}$, el producto cartesiano*

$$\mathbb{N}^k := \underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{k-veces}$$

es numerable.

Demostración. La demostración es inmediata por inducción sobre k. $\square$

Definición 1.2.15. *Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in T}$ se llama* familia numerable *si el conjunto de índices T es numerable. Particularmente si $T = \mathbb{N}$.*

Corolario 1.2.16. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos a lo sumo numerables. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, cada A_n es a lo sumo numerable (finito o numerable). Entonces es fácil ver que existe una aplicación suprayectiva $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. En efecto, si A_n es numerable, luego existe una biyección $g : \mathbb{N} \to A_n$. Tomamos $f_n = g$. Por otro lado, si A_n es finito, existe $p \in \mathbb{N}$ y una biyección $h : [1\,..\,p] \to A_n$. Extendemos h a todo $\mathbb{N}$ poniendo $f_n(k) := h(k)$ si $k \in [1\,..\,p]$, y $f_n(k) = h(1)$ si $k > p$. Claramente $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ es suprayectiva.

Definimos $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ poniendo $\varphi(m, n) := f_n(m)$ para todo $(m, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Claramente, $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es suprayectiva. Ya que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable (ver teorema 1.2.13), se sigue del teorema 1.2.12, que el codominio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es a lo sumo numerable. $\square$

Teorema 1.2.17. *El conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ es numerable.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la aplicación $\varphi(m, n) = m - n$. Se comprueba inmediatamente que φ es suprayectiva con dominio numerable $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Por el teorema 1.2.12, $\mathbb{Z}$ es a lo sumo numerable. Pero siendo $\mathbb{Z}$ infinito, se sigue sin más que $\mathbb{Z}$ es numerable. $\square$

Teorema 1.2.18. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.*

Demostración. $\mathbb{Z}-\{0\}$ es numerable pues es una parte infinita del conjunto numerable $\mathbb{Z}$. Luego $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ es numerable. Definamos $\varphi : \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\}) \to \mathbb{Q}$ por $\varphi(m,n) = \frac{n}{m}$. Claramente φ es suprayectiva, y por el teorema 1.2.12, $\mathbb{Q}$ es a lo sumo numerable. Pero $\mathbb{Q}$ es infinito (pues contiene al conjunto numerable $\mathbb{Z}$), luego $\mathbb{Q}$ es numerable. □

Recordemos el siguiente teorema de cálculo:

Teorema 1.2.19 (Segundo Principio de Inducción Matemática)**.** *Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la implicación siguiente:*

$$\{k \in \mathbb{N} : k < n\} \subset S \Longrightarrow n \in S.$$

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.20. *Todo conjunto infinito contiene un conjunto numerable.*

Demostración. Sea X un conjunto infinito. Vamos a definir inductivamente una aplicación inyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to X$, $n \mapsto a_n$. Ya que $X \neq \emptyset$, existe $a_1 \in \mathbb{X}$. Supongamos ya definidos elementos $\{a_1, \cdots, a_n\}$ distintos a pares. Como X es infinito, tenemos que $X \neq \{a_1, \cdots, a_n\}$, es decir, $X - \{a_1, \cdots, a_n\} \neq \emptyset$. Podemos pues tomar $a_{n+1} \in X - \{a_1, \cdots, a_n\}$. Por el principio de inducción matemática, la aplicación $n \mapsto a_n$ está definida inductivamente. La imagen de esta aplicación es una parte numerable de X. □

Observación 1.2.21. *Explicitemos la aplicación del segundo principio de inducción matemática en la demostración del teorema 1.2.20. Una vez definido $a_1 \in X$, definamos el conjunto S como sigue:*

$$S := \{n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \textit{ se define, y } a_{n+1} \neq a_k \ \forall 1 \leq k \leq n\}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{k \in \mathbb{N} : k < n\} \subset S$. Así $a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ están definidos y son distintos a pares. Como X es infinito, entonces $X - \{a_1, \cdots, a_n\} \neq \emptyset$, por lo que podemos tomar un elemento $a_{n+1} \in X - \{a_1, \cdots, a_n\}$, equivalentemente, $n \in S$. Es decir, se cumple la implicación

$$\{k \in \mathbb{N} : k < n\} \subset S \Longrightarrow n \in S,$$

y por el segundo principio de inducción matemática (teorema 1.2.19), $S = \mathbb{N}$, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, a_n se define, y si $n \neq m$ entonces $a_n \neq a_m$, en otras palabras, queda definida inductivamente una aplicación inyectiva $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto a_n$.

1.3. Existencia de conjuntos infinitos no numerables

Teorema 1.3.1. *El conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *es infinito no numerable.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que existe una biyección $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$, de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}$. Vamos a construir una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente (usando el segundo principio de inducción matemática). Pongamos $\varphi(1) := 1$. Definamos

$$\varphi(2) := \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : x_k > x_1\}.$$

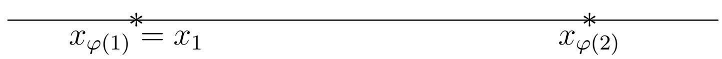

Figura 1.1: Definición de $\varphi(2)$.

Supongamos ya definidos $\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(2m-1), \varphi(2m)$, de suerte que $\varphi(1) < \varphi(2) < \cdots < \varphi(2m-1) < \varphi(2m)$, con $x_{\varphi(2m-1)} < x_{\varphi(2m)}$. Definamos

$$\varphi(2m+1) := \text{mín}\Big\{k \in \mathbb{N} : k > \varphi(2m),\ x_k \in (x_{\varphi(2m-1)}, x_{\varphi(2m)})\Big\},$$

(el conjunto de la derecha es no vacío pues el intervalo $(x_{\varphi(2m-1)}, x_{\varphi(2m)})$ es un conjunto infinito).

También definimos

$$\varphi(2m+2) := \text{mín}\Big\{k \in \mathbb{N} : k > \varphi(2m+1),\ x_k \in (x_{\varphi(2m+1)}, x_{\varphi(2m)})\Big\},$$

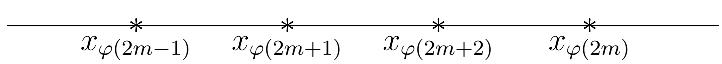

Figura 1.2: Definición de $\varphi(2m+1)$ y $\varphi(2m+2)$.

Ahora φ está construida inductivamente. Por la propia construcción, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente. También tenemos, por construcción, que

$$[x_{\varphi(2m+1)}, x_{\varphi(2m+2)}] \subset (x_{\varphi(2m-1)}, x_{\varphi(2m)}).$$

De aquí se sigue que la sucesión $\{x_{\varphi(2m-1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente. También es acotada superiormente (pues cualquier $x_{\varphi(2m)}$ es un mayorante de dicha sucesión). Por el axioma del supremo, existe

$$y := \sup\{x_{\varphi(2m-1)} : m \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente $y > x_{\varphi(2m-1)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. También $y < x_{\varphi(2m)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Equivalentemente

$$y \in (x_{\varphi(2m-1)}, x_{\varphi(2m)}) \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, puesto que $n \mapsto x_n$ es una biyección, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $y = x_q$. De lo dicho arriba, se desprende que $q \neq \varphi(m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En particular $q \neq \varphi(1)$. Definimos:

$$n = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : \varphi(k+1) > q\}$$

pues el conjunto de la derecha es no vacío (puesto que contiene a q, ya que $\varphi(q+1) > \varphi(q) \geq q$). Dicho mínimo existe gracias al PBO (teorema 1.2.10). Por definición de n y lo dicho antes, se tiene pues:

$$\varphi(n) < q < \varphi(n+1).$$

Distinguimos tres casos:

(i) n es par, o sea, $n = 2m_0$ para algún $m_0 \in \mathbb{N}$, por lo tanto, de nuestras definiciones anteriores,

$$\varphi(2m_0) < q < \varphi(2m_0{+}1) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : k > \varphi(2m_0),\ x_k \in (x_{\varphi(2m_0-1)}, x_{\varphi(2m_0)})\}.$$

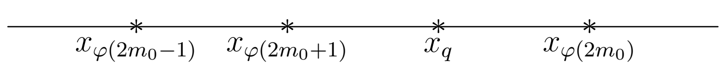

Figura 1.3: Caso (i).

Como también $y = x_q \in (x_{\varphi(2m_0-1)}, x_{\varphi(2m_0)})$, luego q es un elemento del conjunto a la derecha. De la definición de $\varphi(2m_0+1)$, se sigue que $\varphi(2m_0+1) \leq q$, lo cual constituye una contradicción con las desigualdades estrictas anteriores.

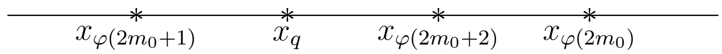

Figura 1.4: Caso (ii).

(ii) n es impar, con $n \neq 1$. Así, $n = 2m_0 + 1$ (para algún $m_0 \in \mathbb{N}$), así que:

$$\varphi(2m_0+1) < q < \varphi(2m_0+2) = \text{mín}\{k > \varphi(2m_0+1) : x_k \in (x_{\varphi(2m_0+1)}, x_{\varphi(2m_0)})\}.$$

Claramente q pertenece al conjunto de la derecha, de donde se sigue que $\varphi(2m_0 + 2) \leq q$, lo cual constituye una contradicción con las desigualdades estrictas precedentes.

(iii) $n = 1$, o sea,

$$\varphi(1) = 1 < q < \varphi(2) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : x_k > x_1\}.$$

Como $x_q \in (x_1, x_{\varphi(2)})$, entonces q pertence al conjunto de la derecha, lo que contradice la definición de $\varphi(2)$.

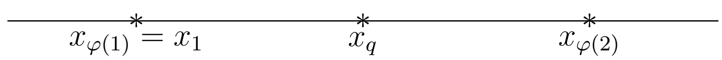

Figura 1.5: Caso (iii).

De la contradicción obtenida se deduce que $\mathbb{R}$ no es numerable. □

Definición 1.3.2. *Se dice que un conjunto tiene la* potencia del continuo *si es equipotente a* $\mathbb{R}$.

Teorema 1.3.3. *Todo intervalo abierto no vacío tiene la potencia del continuo*

Demostración. (i) Afirmamos que dos intervalos abiertos acotados no vacíos (α, β), (a, b) son equipotentes. En efecto, la aplicación

$$x \mapsto a + \left(\frac{b-a}{\beta-\alpha}\right)(x - \alpha)$$

es una biyección del intervalo (α, β) sobre el intervalo (a, b).

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ la aplicación definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3.1}$$

Entonces es fácil ver que f aplica biyectivamente a $\mathbb{R}$ sobre el intervalo abierto acotado $(-1, 1)$ (se deja como ejercicio probar los detalles).

También f transforma biyectivamente todo intervalo abierto $(\alpha, +\infty)$ en el intervalo abierto acotado $(f(\alpha), 1)$, y el intervalo $(-\infty, \alpha)$ en $(-1, f(\alpha))$. En efecto, basta ver que f es estrictamente creciente.

$\square$

1.4. Cardinalidad. Teorema de Schröder-Berstein

Definición 1.4.1. *Una relación $\prec$ sobre un conjunto B se llama* relación de orden *si satisface:*

(i) $x \prec x$, $\forall x \in B$ (reflexibidad)*;*

(ii) $x \prec y, y \prec x \Longrightarrow x = y$ (antisimetría)*;*

(iii) $x \prec y, y \prec z \Longrightarrow x \prec z$ (transitividad)*.*

La relación de orden $\prec$ sobre B se llama relación de orden total*, si además de (i), (ii) y (iii), se cumple también*

(iv) $\forall x, y \in B$ vale por lo menos una de las relaciones:

$$x \prec y \quad \textit{o bien} \quad y \prec x.$$

Una relación de orden que no es total se llama relación de orden parcial.
Un conjunto B provisto de una relación de orden (total, resp. parcial) se dice conjunto ordenado *(*totalmente*, resp.* parcialmente*), y lo denotamos por el par $(B, \prec)$.*

Ejemplo 1.4.2. *(a) La relación $\leq$ en $\mathbb{R}$ (o una parte de $\mathbb{R}$) es una relación de orden total.*

(b) La relación $a|b$ (a divide b) en $\mathbb{N}$, es una relación de orden parcial.

(c) *Sea Ω un conjunto arbitrario. La relación de inclusión $\subset$ sobre el conjunto de las partes de Ω (o también llamado conjunto potencia), $\mathcal{P}(\Omega)$ es una relación de orden parcial.*

Definición 1.4.3. *Sea $(B, \prec)$ un conjunto ordenado.*

(1) *Sea $S \subset B$. El subconjunto S de B se llama* cadena en B*, si la relación $\prec$ restringida a S, hace de S un conjunto totalmente ordenado, es decir, $(S, \prec)$ es un conjunto totalmente ordenado.*

(2) *Sea $S \subset B$, y $a \in B$. El elemento $a \in B$ se llama* mayorante o cota superior *del subconjunto S de B si:*

$$s \prec a, \qquad \forall s \in S.$$

(3) *Un elemento $a \in B$ se llama* elemento maximal *de B si ocurre la implicación:*

$$x \in B, a \prec x \Longrightarrow x = a.$$

Si existe elemento maximal, no necesariamente es único (proporcione un ejemplo).

Un importante teorema de la teoría de conjuntos es:

Teorema 1.4.4 (Lema de Zorn)**.** *Sea $(B, \prec)$ un conjunto ordenado. Supongamos que toda cadena en B admite un mayorante en B. Entonces B posee un elemento maximal.*

Observación 1.4.5. *El Lema de Zorn es equivalente al axioma de elección.*

Definición 1.4.6. *A todo conjunto B le asignamos un símbolo llamado* número cardinal *de B, y notado por $Card(B)$, de tal forma que $Card(B) = Card(C)$ si y sólo si $B \sim C$.*

*Ya lo hicimos en el caso en que B sea finito, entonces $Card(B) \in \mathbb{N}_0$. Ponemos $Card(\mathbb{N}) := \aleph_0$ (*alef cero*). Así, $Card(B) = \aleph_0$ si y sólo si B es numerable.*

*En este curso pondremos $Card(\mathbb{R}) := \aleph$ (*alef*). También es frecuente denotar al cardinal asociado a $\mathbb{R}$ por $\aleph_1$ (*aleph uno*), o por $\mathfrak{c}$. Así pues, $Card(B) = \aleph$ si y sólo si $B \sim \mathbb{R}$ (en este caso diremos que B tiene la* potencia del continuo*).*

Definición 1.4.7. *Sean α, β números cardinales. Sean A, B conjuntos tales que $\alpha = Card(A)$, $\beta = Card(B)$. Se escribe $\alpha \leq \beta$ si existe una aplicación inyectiva de A en B.*

Teorema 1.4.8. *Dos números cardinales arbitrarios α, β son comparables, es decir, vale $\alpha \leq \beta$, o bien, $\beta \leq \alpha$.*

Demostración. Sean A, B dos conjuntos arbitrarios (no vacíos, con $\alpha = Card(A)$, $\beta = Card(B)$). Debemos probar que ó bien existe una inyección de A en B, ó bien una inyección de B en A.

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las ternas (C, D, f), donde $C \subset A$, $D \subset B$, y f es una biyección de C sobre D.

El conjunto $\mathcal{S}$ es no vacío. En efecto, tomemos arbitrariamente algunos puntos $x \in A$, $y \in B$, y pongamos $C := \{x\}$, $D := \{y\}$, $f : C \to D$ la aplicación $f(x) = y$. Entonces $(C, D, f) \in \mathcal{S}$.

Vamos a definir una relación de orden en $\mathcal{S}$: Sean $(C, D, f), (C', D', f') \in \mathcal{S}$. Escribimos $(C, D, f) \prec (C', D', f')$ si $C \subset C'$, $D \subset D'$, y la restricción $f'|_A$ coincide con f. Se comprueba inmediatamente que $\prec$ es una relación de orden en $\mathcal{S}$.

Sea ahora $\{(C_i, D_i, f_i)\}_{i\in I}$ una cadena en $\mathcal{S}$. Es decir, vale la implicación

$$\forall i, j \in I \Longrightarrow (C_i, D_i, f_i) \prec (C_j, D_j, f_j) \quad \text{ó} \quad (C_j, D_j, f_j) \prec (C_i, D_i, f_i).$$

Definimos $C := \bigcup_{i\in I} C_i$, $D := \bigcup_{i\in I} D_i$. Definimos también $f : C \to D$ como sigue: Sea $x \in C$ arbitrario. Luego existe $i_0 \in I$ tal que $x \in C_{i_0}$. Definimos $f(x) := f_{i_0}(x) \in D_{i_0} \subset D$.

(i) Mostremos la univocidad de la definición de f: Sea $j \in I$ otro índice tal que $x \in C_j$. Como $\{(C_i, D_i, f_i)\}_{i\in I}$ es una cadena, entonces $(C_i, D_i, f_i) \prec (C_j, D_j, f_j)$ ó $(C_j, D_j, f_j) \prec (C_i, D_i, f_i)$. Supongamos que $(C_i, D_i, f_i) \prec (C_j, D_j, f_j)$, luego como $x \in A_i \subset A_j$, se tiene que $f_j(x) = f_j|_{A_i}(x) = f_i(x)$, demostrándose la univocidad de la definición.

(ii) Probemos que $f : C \to D$ es inyectiva: Sean $x, x' \in C$ tal que $f(x) = f(x')$. Luego existen $i, j \in I$ tal que $x \in C_i$, $x' \in C_j$. Por ser $\{(C_i, D_i, f_i)\}_{i\in I}$ una cadena se tiene por ejemplo que $(C_i, D_i, f_i) \prec (C_j, D_j, f_j)$. Luego $f(x) = f_i(x) = f_j|_{C_i}(x) = f_j(x)$, y $f(x') = f_j(x')$. Como $f(x) = f(x')$, se sigue que $f_j(x) = f_j(x')$. Siendo f_j una biyección de C_j sobre D_j, se sigue sin más que $x = x'$.

(iii) Probemos que f es suprayectiva: Sea $y \in D$ arbitrario. Luego existe $i \in I$ tal que $y \in D_i$. Siendo f_i una biyección de C_i sobre D_i, existe $x \in C_i$ tal que $y = f_i(x) = f(x)$, probando la suprayectividad de f.

Queda pues probado que f es una biyección de C sobre D, de donde $(C, D, f) \in \mathcal{S}$, y por construcción de esta terna, claramente $(C_i, D_i, f_i) \prec (C, D, f)$ para toda terna (C_i, D_i, f_i) de la cadena. En otras palabras, (C, D, f) es un mayorante de la cadena $\{(C_i, D_i, f_i)\}_{i \in I}$. Por el lema de Zorn, $\mathcal{S}$ posee un elemento maximal. Abandonando las notaciones anteriores, designaremos a este elemento maximal por (C, D, f).

Afirmamos que bien $C = A$ ó bien $D = B$. Razonando por contradicción, supongamos que existen elementos $x \in A - C$, $y \in B - D$. Definamos $C' := C \cup \{x\}$, $D' := D \cup \{y\}$, y sea $f' : C' \to B'$ definida de la forma $f'|C = f$, y $f'(x) = y$. Así, f' es claramente una biyección de C' sobre B', luego $(C', D', f') \in \mathcal{S}$, con $(C, D, f) \prec (C', D', f')$, y $(C, D, f) \neq (C', D', f')$. Esto contradice la maximalidad de (C, D, f). Hemos probado pues que:

$$(1)\ C = A \quad \text{ó} \quad (2)\ D = B.$$

En el caso (1), f es una inyección de A en B. En el caso (2), f^{-1} es una inyección de B en A. □

Teorema 1.4.9 (Teorema de Schröder-Berstein). *Sea α, β numeros cardinales. Si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$.*

Demostración. El enunciado del teorema equivale a lo siguiente: Sean A, B conjuntos. Si existe una inyección de A en B y una inyección de B en A, entonces existe una biyección de A sobre B.

Sean A, B conjuntos, $f : A \to B$, $g : B \to A$ inyecciones. Sea $a \in A$, pongamos $a_0 := a$, a_0 se llama *antecesor de índice cero de a*. Si existe $b_1 \in B$ tal que $g(b_1) = a_0$ (b_1 será necesariamente único) b_1 se llama *antecesor de índice* 1 *de a*. Si existe $a_2 \in A$ (necesariamente único) tal que $f(a_2) = b_1$, a_2 se llama *antecesor de índice* 2 *de a*. Si existe $b_3 \in B$ (necesariamente único) tal que $g(b_3) = a_2$, b_3 se llama *antecesor de índice* 3 *de a*. Inductivamente, se define el antecesor de índice arbitrario de a (si existe).

Análogamente, sea $b \in B$. Ponemos $b_0 := b$ y le llamamos *antecesor de índice cero de b*. Si existe $a_1 \in A$ tal que $f(a_1) = b_0$, a_1 se llama *antecesor de índice* 1 *de b*. Si existe $b_2 \in B$ tal que $g(b_2) = a_1$, b_2 es *antecesor de índice*

2 *de* b. Inductivamente, se define el antecesor de índice arbitrario de b (si existe). Definimos

$$\begin{array}{lll} A_\infty & := & \{a \in A : a \text{ tiene una infinidad de antecesores}\} \\ A_p & := & \{a \in A : \text{el último antecesor de } a \text{ es de índice par, o sea, está en } A\} \\ A_i & := & \{a \in A : \text{el último antecesor de } a \text{ es de índice impar, o sea, está en } B\}. \end{array}$$

Claramente dichos tres conjuntos son disjuntos a pares, y también

$$A = A_\infty \cup A_p \cup A_i.$$

Análogamente

$$\begin{array}{lll} B_\infty & := & \{b \in B : a \text{ tiene una infinidad de antecesores}\} \\ B_p & := & \{b \in B : \text{el último antecesor de } b \text{ es de índice par, o sea, está en } B\} \\ B_i & := & \{b \in B \text{el último antecesor de } b \text{ es de índice impar, o sea, está en } A\}. \end{array}$$

Los tres conjuntos B_∞, B_p, B_i son disjuntos a pares y

$$B = B_\infty \cup B_p \cup B_i.$$

Se ve inmediatamente que

(i) f aplica biyectivamente A_∞ sobre B_∞;

(ii) f aplica biyectivamente A_p sobre B_i;

(iii) g aplica biyectivamente B_p sobre A_i.

Finalmente, definimos $h : A \to B$ como

$$h(a) := \begin{cases} f(a) & \text{si } \; a \in A_\infty \cup A_p \\ \\ g^{-1}(a) & \text{si } \; a \in A_i. \end{cases}$$

Claramente, h es una biyección de A sobre B. ■

Aplicación del teorema de Schröder-Berstein. Sea $K \subset \mathbb{R}$ tal que K contiene un intervalo abierto no vacío. Entonces $Card(K) = \aleph$.

Dem. En efecto, puesto que $K \subset \mathbb{R}$, entonces (1) $Card(K) \leq Card(\mathbb{R}) = \aleph$. También, siendo I un intervalo abierto no vacío tal que $I \subset K$,tenemos (2) $\aleph = Card(I) \leq Card(K)$. Por el teorema de Schröder-Berstein, se sigue de (1) y (2) que $Card(K) = \aleph$, es decir K tiene la potencia del continuo. □

Definición 1.4.10. *Sean α,β números cardinales. Por definición, la relación $\alpha < \beta$ significará $\alpha \leq \beta$, pero $\alpha \neq \beta$. En otras palabras, si $\alpha = Card(A)$, $\beta = Card(B)$, entonces $\alpha < \beta$ significará que : Existe una inyección de A en B, pero no existe una biyección de A sobre B (y por el teorema de Schröder-Berstein, esto dice que no existe una inyección de B sobre A).*

Teorema 1.4.11 (Y definición). *Para todo número cardinal α existe un número cardinal β tal que $\alpha < \beta$. Más precisamente, para todo conjunto A se tiene que*

$$Card(A) < Card(\mathcal{P}(A)).$$

Si $Card(A) = \alpha$, definimos $Card(\mathcal{P}(A)) := 2^{\alpha}$.

Demostración. Sea A un conjunto arbitrario. La aplicación $a \mapsto \{a\}$ es una inyección de A en $\mathcal{P}(A)$. Luego $Card(A) \leq Card(\mathcal{P}(A))$. Resta probar que <u>no</u> existe una biyección de A sobre $\mathcal{P}(A)$.

Razonando por contradicción, supongamos que hubiera una biyección f de A sobre $\mathcal{P}(A)$. Definimos C el subconjunto de A dado por

$$C := \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

Por ser f una biyección, existe $b \in A$ tal que $f(b) = C$.

(i) Si $b \in C$, por definición de C se tiene $b \notin f(b) = C$, lo cual es una contradicción.

(ii) Si $b \notin C$, por definición de C se tiene $b \in f(b) = C$, lo cual es una contradicción.

Esto demuestra que la biyección f no puede existir. □

Hipótesis del continuo.

Si ocurre $\aleph_0 \leq \alpha \leq \aleph$ entonces ó bien $\alpha = \aleph_0$, ó bien $\alpha = \aleph$ (no se puede demostrar la hipótesis del continuo).

1.5. Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto de los números primos es numerable.

2. Sea p un numero natural primo y definamos el conjunto:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) := \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

   Demuestre que $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ es numerable.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, y denotemos por $\mathbb{Q}_n[x]$ todos los polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ de grado $\leq n$, con coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $\mathbb{Q}_n[x]$ es numerable.

4. Sea $\mathbb{Q}[x]$ el anillo de todos los polinomios en la variable x, con coeficientes en el campo $\mathbb{Q}$. Demuestre que $\mathbb{Q}[x]$ es numerable.

5. Un número real $\alpha \in \mathbb{R}$ se llama *algebraico* si existe $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Demuestre que el conjunto de todos los números algebraicos de $\mathbb{R}$ es numerable. Un número que no es algebraico se llama *trascendente* (por ejemplo π y el número de Euler e).

6. Pruebe que la aplicación $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$\varphi(m, n) := \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n,$$

   es una aplicación inyectiva. De aquí concluya que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

7. Demuestre que el conjunto $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$ formado por todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable.

8. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ la colección de todas las sucesiones $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}$ tal que $x_n = 0$ ó 1, para cada n. Demuestre que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

9. Usando la hipótesis del continuo, demuestre que $Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \aleph$.

10. Demuestre que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ es infinito no numerable.

11. Pruebe que el conjunto de los números irracionales tiene la potencia del continuo.

12. Sea Ω un conjunto infinito no numerable y A una parte numerable de Ω. Demuestre que
$$\Omega - A \sim \Omega.$$
Concluya que todo conjunto infinito es equipotente a una parte propia.

13. Establezca la caracterización: "Un conjunto es infinito si y sólo si es equipotente a una parte propia"

14. Proporcione una biyección explícita de $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$. También de $\mathbb{N}^4 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$.

15. Pruebe que la aplicación $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definido por
$$f(x) := \frac{x}{1 + |x|}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$
es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $(-1, 1)$. Además pruebe que es estrictamente creciente. Con ello, demuestre que todo intervalo abierto no vacío es equipotente a un intervalo abierto acotado, y por lo tanto, equipotente a $\mathbb{R}$.

Capítulo 2

Sigma-álgebras

En este capítulo introduciremos una importante *clase* de conjuntos, subconjuntos de un conjunto fijo Ω, llamada *sigma-álgebra*, que en probabilidad, será la clase de todos los *eventos* correspondientes a la realización de un experimento aleatorio y que se llamará la sigma-álgebra de eventos. Denotaremos a dicha clase por letras mayúsculas en script $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{F}$,... etc. La clase de todos los subconjuntos de un conjunto Ω (conjunto *potencia*) será denotado por $\mathscr{P}(\Omega)$

2.1. Espacios medibles

Definición 2.1.1. *Dado un conjunto Ω, sea $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathscr{A}$ es una* sigma-álgebra *sobre Ω si satisface los siguientes axiomas:*

(a) $\Omega \in \mathscr{A}$;

(b) Vale la implicación: $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$ (se dice que $\mathscr{A}$ es cerrada bajo complementación ó por complemento);

(c) Si $\{A_n\}_n$ es una familia numerable (o finita) de subconjuntos de Ω elementos de $\mathscr{A}$ (es decir, $A_n \in \mathscr{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$ (se dice que $\mathscr{A}$ es cerrada bajo uniones numerables o a lo sumo numerables).

Otros nombres son sigma-campo *ó* campo Borel *en lugar de sigma-álgebra.*

Un concepto menos fuerte que el de sigma-álgebra es:

Definición 2.1.2. *Una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω se llama una* semi-álgebra *sobre Ω si:*

(a) $\Omega \in \mathscr{A}$*;*

(b) Si $A \in \mathscr{A}$, entonces A^c puede ser expresado como la unión de un número finito de conjuntos disjuntos elementos de $\mathscr{A}$;

(c) Cuando $A, B \in \mathscr{A}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{A}$.

Es fácil verificar la siguiente observación:

Observación 2.1.3. *Sea $\mathscr{A}$ una sigma-álgebra sobre Ω, entonces*

(a) Si $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$ (se dice que $\mathscr{A}$ es cerrada bajo intersecciones numerables ó a lo sumo numerables);

(b) $\emptyset \in \mathscr{A}$*;*

(c) Siempre que $A, B \in \mathscr{A}$, entonces $A - B \in \mathscr{A}$;

(d) $\mathscr{A}$ es una semi-álgebra.

En el caso de que $\mathscr{A}$ sea una semi-álgebra, entonces $\emptyset \in \mathscr{A}$.

Ejemplo 2.1.4. *(i) Ejemplos triviales de sigma-álgebras sobre un conjunto Ω son, por ejemplo, la sigma-álgebra* indiscreta $\{\emptyset, \Omega\}$, *y la sigma-álgebra* discreta $\mathscr{P}(\Omega)$. *Por cierto, note que cualquier sigma-álgebra $\mathscr{A}$ sobre Ω satisface*

$$\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega).$$

En otras palabras, la sigma-álgebra indiscreta $\{\emptyset, \Omega\}$ es la sigma-álgebra "más pequeña"sobre Ω, y la sigma-álgebra discreta $\mathscr{P}(\Omega)$ es la sigma-álgebra "más grande"sobre Ω.

(ii) Sea $\Omega = \mathbb{R}$, y sea $\mathscr{F}$ la clase de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la forma

$$\begin{array}{lll}
(a, b], & \text{con} & -\infty < a < b < \infty, \\
(-\infty, b], & \text{con} & -\infty < b < \infty, \\
(a, \infty), & \text{con} & -\infty < a < \infty, \\
\mathbb{R} & & \\
\emptyset & &
\end{array}$$

Es fácil verificar que $\mathscr{F}$ es una semi-álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.5. *Sea Ω un conjunto y $\mathscr{F}$ una sigma-álgebra sobre Ω. El par $(\Omega, \mathscr{F})$ se llama* espacio medible*.*

2.2. Sigma-álgebra generada

Se tiene el siguiente teorema que nos permitirá construir sigma-álgebras sobre un conjunto.

Teorema 2.2.1. *Sea Ω un conjunto, y sea $\mathscr{C}$ una clase no vacía formada por subconjuntos de Ω. Entonces existe una y solamente una sigma-álgebra $\mathscr{F}$ sobre Ω tal que*

(i) $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ (i.e. $\mathscr{F}$ contienen a todos los subconjuntos de Ω que son elementos de la clase $\mathscr{C}$);

(ii) Si $\mathscr{A}$ es cualquier sigma-álgebra sobre Ω que contiene a $\mathscr{C}$, entonces $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$.

Podemos decir que $\mathscr{F}$ es la sigma-álgebra sobre Ω "más pequeña"que contiene a todos los subconjuntos de Ω elementos de la clase $\mathscr{C}$. Esta sigma-álgebra se llama la sigma-álgebra generada *por $\mathscr{C}$, y la denotaremos por $\sigma(\mathscr{C})$. En este caso diremos que $\mathscr{C}$ es una* clase generadora *de $\mathscr{F}$.*

Demostración. **Unicidad.** Primero mostremos que una sigma-álgebra sobre Ω, $\mathscr{F}$, satisfaciendo (i) y (ii), es única: Sea $\mathscr{F}^*$ otra sigma-álgebra sobre Ω que satisface los incisos (i) y (ii). Luego $\mathscr{F}^*$ es una sigma-álgebra sobre Ω tal que $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}^*$, entonces, puesto que $\mathscr{F}$ satisface (ii), se tiene que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^*$. Por otro lado, $\mathscr{F}^*$ también satisface (ii), y siendo $\mathscr{F}$ una sigma-álgebra sobre Ω que contiene a los conjuntos elementos de $\mathscr{C}$, entonces $\mathscr{F}^* \subset \mathscr{F}$. De estas dos inclusiones se tiene que $\mathscr{F} = \mathscr{F}^*$.

Existencia. Consideremos a la clase de todas las sigma-álgebras sobre Ω que contienen a la clase $\mathscr{C}$, es decir,

$$\mathscr{L} = \{\mathscr{A} : \mathscr{A} \text{ es sigma-álgebra sobre } \Omega \text{ y } \mathscr{C} \subset \mathscr{A}\}.$$

Dicha clase es no vacía pues la sigma-álgebra discreta $\mathscr{P}(\Omega) \in \mathscr{L}$. Definamos por $\mathscr{F}$ la clase formada por todos los subconjuntos de Ω que pertenecen a todas la sigma-álgebras de Ω que contienen a $\mathscr{C}$, es decir,

$$\mathscr{F} := \bigcap_{\mathscr{A} \in \mathscr{L}} \mathscr{A}.$$

Claramente $\mathscr{F}$ satisface (i) y (ii). Resta probar que $\mathscr{F}$ es sigma-álgebra sobre Ω. En efecto, vale

(a) Como $\Omega \in \mathscr{A}$ para todo $\mathscr{A} \in \mathscr{L}$, entonces $\Omega \in \bigcap_{\mathscr{A}\in\mathscr{L}} \mathscr{A} = \mathscr{F}$.

(b) Si $A \in \mathscr{F} = \bigcap_{\mathscr{A}\in\mathscr{L}} \mathscr{A}$, entonces $A \in \mathscr{A}$ para toda sigma-álgebra $\mathscr{A} \in \mathscr{L}$, luego $A^c \in \mathscr{A}$ para todo $\mathscr{A} \in \mathscr{L}$, es decir, $A^c \in \bigcap_{\mathscr{A}\in\mathscr{L}} \mathscr{A} = \mathscr{F}$.

(c) Sea $\{A_n\}_n$ una familia numerable de subconjuntos de Ω elementos de $\mathscr{F}$, luego $\{A_n\}_n$ es una familia numerable de subconjuntos de Ω elementos de $\mathscr{A}$ para toda sigma-álgebra $\mathscr{A} \in \mathscr{L}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$ para toda sigma-álgebra $\mathscr{A} \in \mathscr{L}$. Luego

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{\mathscr{A}\in\mathscr{L}} \mathscr{A} = \mathscr{F}.$$

Los incisos (a), (b), (c) prueban que $\mathscr{F}$ es una sigma-algebra sobre Ω que satisface (i) y (ii).

$\square$

2.3. La sigma-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$

Una sigma-álgebra generada fundamental está definida en $\Omega = \mathbb{R}$, y la clase τ que genera es la clase de todos los subconjuntos *abiertos* de la recta real, es decir, τ es la *topología canónica* de $\mathbb{R}$. Recordemos que sobre $\mathbb{R}$ se define la *distancia* canónica: $d(x,y) := |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Recordemos las siguientes definiciones:

Definición 2.3.1. *(a) Dados $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, definimos la* bola abierta centrada en x y de radio r *al subconjunto de* $\mathbb{R}$

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R} : d(x,y) = |x-y| < r\}.$$

Claramente, la bola abierta centrada en x y radio r, $B(x,r)$, coincide con el intervalo abierto acotado $(x-r, x+r)$, i.e., $B(x,r) = (x-r, x+r)$.

(b) Un subconjunto G de $\mathbb{R}$ se dice abierto *si vale:*

$$\forall x \in G\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } B(x,\delta) = (x-\delta, x+\delta) \subset G.$$

(c) *Denotamos por $\tau_{\mathbb{R}}$ la clase de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Notemos que todo intervalo abierto es una abierto de $\mathbb{R}$. La clase $\tau_{\mathbb{R}}$ se llama la* topología *de $\mathbb{R}$.*

(d) *Un subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ se llama* cerrado *si su complemento, F^c, es un subconjunto abierto. Notemos que todo intervalo cerrado es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. También el conjunto entero $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío $\emptyset$ son cerrados.*

Observación 2.3.2. *La clase $\tau_{\mathbb{R}}$ satisface los siguientes hechos:*

(i) $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau_{\mathbb{R}}$;

(ii) *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una famila arbitraria de abiertos. Entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \in \tau_{\mathbb{R}}$, es decir, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ es un abierto. Decimos que $\tau_{\mathbb{R}}$ es* cerrado *bajo uniones arbitrarias.*

(iii) *Sean $\{G_1, \cdots, G_n\}$ una familia finita de abiertos de $\mathbb{R}$. Entonces $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau_{\mathbb{R}}$, o sea, $\bigcap_{i=1}^n G_i$ es también un abierto de $\mathbb{R}$. Decimos que $\tau_{\mathbb{R}}$ es* cerrado *bajo intersecciones finitas.*

Por su parte, los conjuntos cerrados satisfaces los siguientes hechos:

Observación 2.3.3. (i) *$\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son cerrados de $\mathbb{R}$;*

(ii) *Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una colección arbitraria de cerrados de $\mathbb{R}$, entonces $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$ es un cerrado de $\mathbb{R}$ (la clase de todos los cerrados de $\mathbb{R}$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias).*

(iii) *Sean $\{F_1, \cdots, F_n\}$ una familia finita de cerrados de $\mathbb{R}$. Entonces $\bigcup_{i=1}^n F_i$ es un cerrado de $\mathbb{R}$ (es decir, la clase de todos los cerrados de $\mathbb{R}$ es cerrada bajo uniones finitas).*

Definición 2.3.4. *La sigma-álgebra generada por la topología $\tau_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ se llama la* sigma-álgebra de Borel *de $\mathbb{R}$, y será denotada por $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, es decir, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\tau_{\mathbb{R}})$. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tal que $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ se llama un* boreliano *de $\mathbb{R}$.*

Teorema 2.3.5. *Sea $\mathscr{C}$ la clase de todos los cerrados de $\mathbb{R}$. Entonces la sigma-álgebra generada por la clase $\mathscr{C}$ coincide con la sigma-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, es decir, la clase de todos los cerrados de $\mathbb{R}$ genera a la sigma-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, o sea $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{C})$.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ la sigma-álgebra generada por la clase de los cerrados de $\mathbb{R}$, es decir, $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$. Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$, entonces F^c es un abierto de $\mathbb{R}$, y por lo tanto, $F^c \in \tau_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$, y como toda sigma-álgebra es cerrada bajo complementación, $F \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Así, $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$, de donde por el inciso (ii) del teorema 2.2.1,

$$\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}). \tag{2.3.1}$$

Por otro lado, si G es un abierto de $\mathbb{R}$, entonces $F = G^c$ es un cerrado de $\mathbb{R}$, es decir, $F = G^c \in \mathscr{C} \subset \mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ es cerrado bajo complementación, $G \in \mathscr{F}$, de donde $\tau_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{F}$, lo que implica, por el inciso (ii) del teorema 2.2.1,

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\tau_{\mathbb{R}}) \subset \mathscr{F}. \tag{2.3.2}$$

Comparando (2.3.1) y (2.3.2), se tiene que $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$.

□

Teorema 2.3.6. *Cada una de las siguientes clases de intervalos de* $\mathbb{R}$ *generan a los borelianos de* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_1 &:= \{(-\infty, z] : z \in \mathbb{R}\}; \\
\mathscr{C}_2 &:= \{(z, \infty) : z \in \mathbb{R}\}; \\
\mathscr{C}_3 &:= \{[z, \infty) : z \in \mathbb{R}\}; \\
\mathscr{C}_4 &:= \{(-\infty, z) : z \in \mathbb{R}\};
\end{aligned}$$

vale decir, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{C}_1) = \sigma(\mathscr{C}_2) = \sigma(\mathscr{C}_3) = \sigma(\mathscr{C}_4)$.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ la clase de los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Por el teorema 2.3.5, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{C})$. Como $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}$, entonces vale

$$\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Como toda sigma-álgebra es cerrada bajo complementación, uniones numerables, e intersecciones numerables (ver observación 2.1.3-(a)), así también, teniendo en mente que

$$(z, \infty) = (-\infty, z]^c, \qquad [z, \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (z - \frac{1}{n}, \infty), \qquad (-\infty, z) = [z, \infty)^c,$$

y además

$$(-\infty, z] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, z + \frac{1}{n}),$$

entonces vale la cadena de inclusiones

$$\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_4) \subset \sigma(\mathscr{C}_3) \subset \sigma(\mathscr{C}_2) \subset \sigma(\mathscr{C}_1),$$

lo que demuestra que

$$\sigma(\mathscr{C}_4) = \sigma(\mathscr{C}_3) = \sigma(\mathscr{C}_2) = \sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

El teorema quedará probado si demostramos que

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathscr{C}_1).$$

En efecto, sea G un abierto de $\mathbb{R}$, luego para todo $x \in G$ existe $\delta_x > 0$ tal que $x \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset G$. Por la propiedad de la densidad de los racionales, podemos escoger sendos racionales $r_x, s_x \in \mathbb{Q}$ tal que $x - \delta_x < r_x < x < s_x < x + \delta_x$, es decir,

$$x \in (r_x, s_x] \subset (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset G.$$

En otras palabras,

$$G = \bigcup_{(r,s)\in\mathscr{L}} (r, s],$$

donde $\mathscr{L} = \{(r, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : r < s, \quad (r, s] \subset G\}$. Puesto que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable y $\mathscr{L} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, entonces $\mathscr{L}$ es a lo sumo numerable (ver teorema 1.2.11). Así, el abierto G es reunión a lo sumo numerable de intervalos semiabiertos de la forma $(r, s] = (-\infty, s] - (-\infty, r] \in \sigma(\mathscr{C}_1)$ (ver observación 2.1.3-(c)). Como toda sigma-álgebra es cerrada bajo uniones numerables, se tiene que $G \in \sigma(\mathscr{C}_1)$ para todo G abierto de $\mathbb{R}$, es decir, $\tau_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{C}_1)$, de donde se concluye que $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathscr{C}_1)$, probándose el teorema.

□

2.4. La sigma-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Consideremos el espacio vectorial real n-dimensional

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

Sea $\|\cdot\|$ una norma fija sobre $\mathbb{R}^n$. Se definen los siguientes conjuntos:

(i) Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos la *bola abierta de centro x y radio r* por

$$B_{\|\cdot\|}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}.$$

(ii) Un subconjunto G de $\mathbb{R}^n$ se llama *abierto* (con respecto a la norma considerada $\|\cdot\|$) si

$$\forall x \in G\ \exists r > 0 \text{ tal que } B_{\|\cdot\|}(x,r) \subset G.$$

(iii) Denotamos por $\tau_{\|\cdot\|}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ con respecto a la norma $\|\cdot\|$. El conjunto $\tau_{\|\cdot\|}$ contiene a todas las bolas abiertas $B_{\|\cdot\|}(x,r)$, es decir, son abiertos de $\mathbb{R}^n$ (con respecto a la norma $\|\cdot\|$). También los intevalos n-dimensionales $I^{(n)} = I_1 \times \cdots \times I_n$, con I_k intervalo abierto de $\mathbb{R}$ para todo $k = 1, \cdots, n$, son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.

La clase $\tau_{\|\cdot\|}$ se llama la *topología de* $\mathbb{R}^n$ *con respecto a la norma* $\|\cdot\|$.

Ejemplo 2.4.1. *Sobre* $\mathbb{R}^n$ *se definen las siguientes normas:*

$$\|x\|_1 := \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \qquad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \textit{(norma uno)}$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \qquad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \textit{(norma euclidiana)}$$

$$\|x\|_\infty := \text{máx}_{1 \le i \le n} |x_i|, \qquad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \textit{(norma cúbica)}$$

Más aún, para cada $p \geq 1$*, definimos la norma*

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \qquad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \textit{(norma p-ésima.)}$$

Estas normas definen sendas topologías sobre $\mathbb{R}^n$*:* $\tau_{\|\cdot\|_1}$, $\tau_{\|\cdot\|_2}$, $\tau_{\|\cdot\|_\infty}$, *y* $\tau_{\|\cdot\|_p}$ *para cada* $p \geq 1$*. El siguiente teorema nos dice que todas estas topologías coinciden, es decir,*

$$\tau_{\|\cdot\|_1} = \tau_{\|\cdot\|_2} = \tau_{\|\cdot\|_\infty} = \tau_{\|\cdot\|_p}.$$

Teorema 2.4.2 (Equivalencia de normas sobre $\mathbb{R}^n$). *Cualesquiera dos normas* $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ *sobre* $\mathbb{R}^n$ *son equivalentes, es decir, definen la misma topología:*

$$\tau_{\|\cdot\|} = \tau_{\|\cdot\|'},$$

equivalentemente, existen $\alpha, \beta > 0$ *tal que*

$$\alpha\|\cdot\|' \leq \|\cdot\| \leq \beta\|\cdot\|'.$$

Notación: *Esta única topología sobre* $\mathbb{R}^n$ *inducida por cualquier norma, se denotará por* $\tau_{\mathbb{R}^n}$*, y satisface las mismas propiedades establecidas en la observación 2.3.2 para* $\tau_{\mathbb{R}}$*. Por cierto, un subconjuto* F *de* $\mathbb{R}^n$ *es cerrado si su complemento* F^c *es abierto.*

Definición 2.4.3. *Definimos la* sigma-álgebra de Borel *de* $\mathbb{R}^n$ *como la sigma-álgebra generada por la topología de los abiertos de* $\mathbb{R}^n$*, y lo denotaremos por* $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$*. Así,*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) := \sigma(\tau_{\mathbb{R}^n}).$$

Cada subconjunto de $\mathbb{R}^n$ *elemento de* $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ *se llama* boreliano de $\mathbb{R}^n$*.*

Con las notaciones del teorema 2.3.6, se tiene el siguiente teorema sobre los borelianos de $\mathbb{R}^n$:

Teorema 2.4.4. *Cada una de las siguientes clases de subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *generan a los borelianos de* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{array}{rcl}
\mathscr{C}^{(n)} & := & \textit{La clase de todos los subconjuntos cerrados de } \mathbb{R}^n; \\
\mathscr{C}_1^{(n)} & := & I_1 \times \cdots \times I_n, \quad I_1, \cdots, I_n \in \mathscr{C}_1; \\
\mathscr{C}_2^{(n)} & := & I_1 \times \cdots \times I_n, \quad I_1, \cdots, I_n \in \mathscr{C}_2; \\
\mathscr{C}_3^{(n)} & := & I_1 \times \cdots \times I_n, \quad I_1, \cdots, I_n \in \mathscr{C}_3; \\
\mathscr{C}_4^{(n)} & := & I_1 \times \cdots \times I_n, \quad I_1, \cdots, I_n \in \mathscr{C}_4;
\end{array}$$

vale decir, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathscr{C}^n) = \sigma(\mathscr{C}_1^n) = \sigma(\mathscr{C}_2^n) = \sigma(\mathscr{C}_3^{(n)}) = \sigma(\mathscr{C}_4^{(n)})$.

Demostración. La demostración es similar a la del teorema 2.3.6, y se deja como ejercicio. □

2.5. sigma-álgebra preimagen

Definición 2.5.1. *Sean* Ω *y* Ω' *dos subconjuntos no vacíos,* $f : \Omega \to \Omega'$ *una aplicación.*

(a) Para cualquier subconjunto $A' \subset \Omega'$*, la* preimagen o imagen inversa *de* A' bajo f *se define como el subconjunto de* Ω*, denotado por* $f^{-1}(A')$ *por*

$$f^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\}.$$

Así,

$$\omega \in f^{-1}(A') \Longleftrightarrow f(\omega) \in A'.$$

(b) Más generalmente, si $\mathscr{C}'$ *es cualquier clase no vacía de subconjuntos de* Ω'*,* $f^{-1}(\mathscr{C}')$ *es la clase de preimagenes bajo* f *(como se define en el*

inciso (a) de esta definición) de todos los subconjuntos de Ω' elementos de la clase $\mathscr{C}'$, i.e. es la clase de subconjuntos de Ω,

$$f^{-1}(\mathscr{C}') := \{f^{-1}(A') \in \mathscr{P}(\Omega) : A' \in \mathscr{C}\}$$

La definición precedente establece que a cada aplicación $f : \Omega \to \Omega'$ corresponde una aplicación $f^{-1} : \mathscr{P}(\Omega') \to \mathscr{P}(\Omega)$. Note que la existencia de esta aplicación no presupone la existencia de una aplicación inversa de f en el sentido ordinario.

Teorema 2.5.2. *Sean Ω, Ω' dos conjuntos y $f : \Omega \to \Omega'$ una aplicación. Entonces*

(i) $f^{-1}(\Omega') = \Omega$ *y* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$*;*

(ii) Si $A' \subset \Omega'$*,*
$$f^{-1}(\Omega' - A') = \Omega - f^{-1}(A');$$

(iii) Sea $\{A'_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *una familia de subconjuntos de* Ω'*, entonces*
$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A'_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A'_\alpha),$$
y
$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A'_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A'_\alpha);$$

(iv) Si $A', B' \subset \Omega'$*, vale*
$$f^{-1}(A' - B') = f^{-1}(A') - f^{-1}(B');$$

(v) Si $A' \subset B' \subset \Omega'$*, vale*
$$f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B');$$

(vi) Si $\mathscr{B}'$ *y* $\mathscr{C}'$ *son dos clases no vacías de subconjuntos de* Ω' *tal que* $\mathscr{B}' \subset \mathscr{C}'$*, entonces*
$$f^{-1}(\mathscr{B}') \subset f^{-1}(\mathscr{C}');$$

(vii) *Si $\mathscr{F}'$ es una sigma-álgebra sobre Ω', entonces $f^{-1}(\mathscr{F}')$ es una sigma-álgebra sobre Ω;*

(viii) *Si $\mathscr{F}$ es una sigma-álgebra sobre Ω, entonces*

$$\{A' \subset \Omega' : f^{-1}(A') \in \mathscr{F}\}$$

(i.e., la clase de los subconjuntos A' de Ω' para el cual $f^{-1}(A') \in \mathscr{F}$) es una sigma-álgebra sobre Ω';

(ix) *Si $\mathscr{C}'$ es una clase no vacía de subconjuntos de Ω', entonces*

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'));$$

donde $\sigma(\mathscr{C}')$ es la sigma-álgebra sobre Ω' generada por la clase $\mathscr{C}'$, mientras que $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$ es la sigma-álgebra sobre Ω generada por la clase $f^{-1}(\mathscr{C}')$.

Demostración. Sólo probaremos (ix): Por el teorema 2.2.1, se tiene $\mathscr{C}' \subset \sigma(\mathscr{C}')$, por (vi) de aquí se sigue que $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))$, pero por inciso (vii), $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))$ es una sigma-álgebra sobre Ω que contiene a la clase $f^{-1}(\mathscr{C}')$, y de nuevo, por el teorema 2.2.1, vale

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')).$$

Resta probar la inclusión recíproca. Definamos

$$\mathscr{B} := \{A' \subset \Omega' : \ f^{-1}(A') \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))\}.$$

Por (viii), $\mathscr{B}$ es una sigma-álgebra sobre Ω'. Además contiene a $\mathscr{C}'$. Por el teorema 2.2.1,

$$\sigma(\mathscr{C}') \subset \mathscr{B};$$

de donde para todo $A' \in \sigma(\mathscr{C}')$, se tiene que $f^{-1}(A') \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$, equivalentemente

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$$

probándose la inclusión recíproca y el teorema. □

Definición 2.5.3. *Dado $A \subset \Omega$ definimos la* función indicadora *o* función caracterísita *de A por la aplicación $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$*

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1 & si \quad \omega \in A \\ \\ 0 & si \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

2.6. Ejercicios

1. Sea Ω un conjunto infinito no numerable, es decir, $Card(\Omega) > \aleph_0$. Definamos la clase de subconjuntos de Ω por

$$\mathscr{A} := \{A \subset \Omega : A \quad \text{o bien} \quad A^c \quad \text{es a los sumo numerable}\}.$$

   Pruebe que $\mathscr{A}$ es una sigma-álgebra sobre Ω.

2. Sea Ω un conjunto infinito no numerable, y sea $\mathscr{C}$ la colección de los conjuntos unipuntuales de X, vale decir

$$\mathscr{C} := \Big\{\{x\} : x \in X\Big\}.$$

   Encuentre la sigma-álgebra generada por $\mathscr{C}$. Compárela con la sigma-álgebra del problema precedente $\mathscr{A}$. ¿Quién es más grande? ¿Son diferentes?.

3. En $\mathbb{R}$ considere la sigma-álgebra $\mathscr{A}$ definida en el problema 1. Establezca alguna relación de inclusión si existiera, entre $\mathscr{A}$ y la sigma-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

4. Pruebe que la clase formada por todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ generan a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

5. Pruebe que también $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ es generada por la clase de todos los intervalos abiertos y acotados con extremos en el conjunto de los racionales.

6. Sea $\mathscr{F}$ una sigma-álgebra sobre Ω, y sean $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$B_k := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para al menos } k \text{ valores distintos de índices } n\}.$$

   Muestre que

   (a) $B_k \in \mathscr{F}$ para cada $k \in \mathbb{N}$;

   (b) $B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para un infinidad de índices } n\}$. Pruebe que

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

(c) Muestre también que

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m\right).$$

7. Sea A una parte propia de Ω no vacía. Demuestre que la sigma-álgebra generada por $\{A\}$ es $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

8. Encuentre la sigma-álgebra generada por la clase $\mathscr{C} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$ si

   (a) $\Omega = \{1,2,3,4\}$;

   (b) $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$.

9. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}^*$ dos clases no vacías de subconjuntos de Ω. Pruebe que

   (a) Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}^*$, entonces $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C}^*)$;

   (b) Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}^* \subset \sigma(\mathscr{C})$, entonces $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}^*)$;

   (c) $\sigma(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(\mathscr{C})$.

10. Sean $f : \Omega \to \Omega'$, $g : \Omega' \to \Omega''$ dos aplicaciones, y sea $h = g \circ f : \Omega \to \Omega''$. Pruebe que si $A'' \subset \Omega''$, entonces

$$h^{-1}(A'') = f^{-1}(g^{-1}(A'')).$$

11. Suponga que $f : \Omega \to \Omega'$ es una aplicación, y sea $\mathscr{C}'$ una semi-álgebra sobre Ω'. Pruebe que $f^{-1}(\mathscr{C}')$ es una semi-álgebra sobre Ω.

12. Sean $A, B \subset \Omega$. Demuestre que $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B} = \text{máx}\{1_A, 1_B\}$. También demuestre que $1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B = \text{máx}\{1_A, 1_B\}$.

13. Muestre que si $A \subset B \subset \Omega$, demuestre que $1_A \leq 1_B$.

14. Sea $f : \Omega \to \Omega'$ una aplicación. Para cada $A \subset \Omega$ definimos

$$f(A) := \{f(\omega) : \omega \in A\} \subset \Omega'.$$

   Pruebe los siguientes resultados

   (i) $f(\emptyset) = \emptyset$, pero $f(\Omega) \subset \Omega'$ (puede haber inclusión estricta);

(ii) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subconjuntos de Ω. Entonces

$$f(\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha);$$

pero

$$f(\cap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha) \subset \cap_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha), \quad \text{(La inclusión puede ser estricta).}$$

(iii) Si $A \subset B \subset \Omega$, entonces $f(A) \subset f(B)$.

(iv) Son falsas las aseveraciones siguientes:

$$f(\Omega - A) \subset \Omega' - f(A), \quad \Omega' - f(A) \subset f(\Omega - A), \quad (A \subset \Omega).$$

(v) Muestre que si $A \subset \Omega$, entonces $A \subset f^{-1}(f(A))$. Construya un ejemplo donde la inclusión estricta es posible.

(vi) Muestre que si $A' \subset \Omega'$, entonces $f(f^{-1}(A')) \subset A'$. Construya un ejemplo donde la inclusión estricta es posible.

(vii) Para cualquier clase no vacía de $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ de subconjuntos de Ω, definimos

$$f(\mathscr{C}) := \{f(A) : A \in \mathscr{C}\} \subset \mathscr{P}(\Omega').$$

Construya un ejemplo para mostrar que si $\mathscr{F}$ es una sigma-álgebra sobre Ω, entonces $f(\mathscr{F})$ no es necesariamente una sigma-álgebra sobre Ω', aún incluso si pasa que $f(\Omega) = \Omega'$.

Bibliografía

[1] Ash, R., Doléans-Dade C., *Probability* & *Measure Theory*, Academic Press, Reimpreso 2008.

[2] Bergström, H., *Weak Convergence of Measures*, Academic Press, 2014.

[3] Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1999.

[4] Cohn, D. L., *Measure Theory*, Birkhäuser, segunda edición, 2010.

[5] Dudley, R. M., *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press, segunda edición, 2011.

[6] Durrett, R., *Probability. Theory and examples*, Cambridge University Press; cuarta edición, 2010.

[7] Ethier, S., Kurtz, T., *Markov Processes: Characterization and Convergence*, Wiley-Interscience; 2nd edition, 2005.

[8] Föllmer, H., Schied, A., *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, de Gruyter; Edición: 4th Rev., ed. 2016.

[9] Gnedenko, B.V., Kolmogorov, A.N., *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, 1968.

[10] Iglehart, D. L. *Weak convergence in applied probability*, Stoch. Proc. Appl. 2, pp. 211 – 241, 1974.

[11] Kallenberg, O., *Foundations of Modern Probability*, Springer, Probability and its Applications, 2001.

[12] KALLENBERG, O., *Random Measures, Theory and Applications*, Springer, Probability Theory and Stochastic Modelling, 2017.

[13] KUSHNER, H., *Approximation and Weak Convergence Methods with Applications to Stochastic Systems Theory*, MIT Press, 2008.

[14] KUSHNER, H., *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer, serie: Stochastic Modelling and Applied Probability (Book 24), 2000.

[15] ROYDEN, H. L., *Real Analysis*, Prentice Hall College, tercera edición 1988.

[16] TUCKER, H. G., *A graduate Course in Probability*, Dover Publications, Inc., 2014.