Probabilidad II. Lista 1.

1. Demuestre que el conjunto de los números primos es numerable.
2. Sea p un número natural primo y definamos el conjunto:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) := \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Demuestre que $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ es numerable.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, y denotemos por $\mathbb{Q}_n[x]$ todos los polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ de grado $\leq n$, con coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $\mathbb{Q}_n[x]$ es numerable.
4. Sea $\mathbb{Q}[x]$ el anillo de todos los polinomios en la variable x , con coeficientes en el campo $\mathbb{Q}$. Demuestre que $\mathbb{Q}[x]$ es numerable.
5. Un número real $\alpha \in \mathbb{R}$ se llama *algebraico* si existe $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Demuestre que el conjunto de todos los números algebraicos de $\mathbb{R}$ es numerable. Un número que no es algebraico se llama *trascendente* (por ejemplo π y el número de Euler e).
6. Pruebe que la aplicación $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$\varphi(m, n) := \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n,$$

es una aplicación inyectiva. De aquí concluya que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

7. Demuestre que el conjunto $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$ formado por todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable.
8. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ la colección de todas las sucesiones $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}$ tal que $x_n = 0$ ó 1 , para cada n . Demuestre que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
9. Usando la hipótesis del continuo, demuestre que $\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \aleph$.
10. Demuestre que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ es infinito no numerable.

11. Pruebe que el conjunto de los números irracionales tiene la potencia del continuo.
12. Sea Ω un conjunto infinito no numerable y A una parte numerable de Ω . Demuestre que

$$\Omega - A \sim \Omega.$$

Concluya que todo conjunto infinito es equipotente a una parte propia.

13. Establezca la caracterización: “Un conjunto es infinito si y sólo si es equipotente a una parte propia”
14. Proporcione una biyección explícita de $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$. También de $\mathbb{N}^4 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$.
15. Pruebe que la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ definido por

$$f(x) := \frac{x}{1 + |x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $(-1, 1)$. Además pruebe que es estrictamente creciente. Con ello, demuestre que todo intervalo abierto no vacío es equipotente a un intervalo abierto acotado, y por lo tanto, equipotente a $\mathbb{R}$.