Probabilidad II. Lista 2.

1. Sea Ω un conjunto infinito no numerable, es decir, $Card(\Omega) > \aleph_0$. Definamos la clase de subconjuntos de Ω por

$$\mathscr{A} := \{A \subset \Omega : A \quad \text{o bien} \quad A^c \quad \text{es a los sumo numerable}\}.$$

   Pruebe que $\mathscr{A}$ es una sigma-álgebra sobre Ω.

2. Sea Ω un conjunto infinito no numerable, y sea $\mathscr{C}$ la colección de los conjuntos unipuntuales de X, vale decir

$$\mathscr{C} := \Big\{\{x\} : x \in X\Big\}.$$

   Encuentre la sigma-álgebra generada por $\mathscr{C}$. Compárela con la sigma-álgebra del problema precedente $\mathscr{A}$. ¿Quién es más grande? ¿Son diferentes?.

3. En $\mathbb{R}$ considere la sigma-álgebra $\mathscr{A}$ definida en el problema 1. Establezca alguna relación de inclusión si existiera, entre $\mathscr{A}$ y la sigma-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

4. Pruebe que la clase formada por todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ generan a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

5. Pruebe que también $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ es generada por la clase de todos los intervalos abiertos y acotados con extremos en el conjunto de los racionales.

6. Sea $\mathscr{F}$ una sigma-álgebra sobre Ω, y sean $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$B_k := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para al menos } k \text{ valores distintos de índices } n\}.$$

   Muestre que

   (a) $B_k \in \mathscr{F}$ para cada $k \in \mathbb{N}$;

   (b) $B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para un infinidad de índices } n\}$. Pruebe que

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

(c) Muestre también que

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m \right).$$

7. Sea A una parte propia de Ω no vacía. Demuestre que la sigma-álgebra generada por $\{A\}$ es $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

8. Encuentre la sigma-álgebra generada por la clase $\mathscr{C} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$ si

   (a) $\Omega = \{1,2,3,4\}$;

   (b) $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$.

9. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}^*$ dos clases no vacías de subconjuntos de Ω. Pruebe que

   (a) Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}^*$, entonces $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C}^*)$;

   (b) Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}^* \subset \sigma(\mathscr{C})$, entonces $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}^*)$;

   (c) $\sigma(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(\mathscr{C})$.

10. Sean $f : \Omega \to \Omega'$, $g : \Omega' \to \Omega''$ dos aplicaciones, y sea $h = g \circ f : \Omega \to \Omega''$. Pruebe que si $A'' \subset \Omega''$, entonces

$$h^{-1}(A'') = f^{-1}(g^{-1}(A'')).$$

11. Suponga que $f : \Omega \to \Omega'$ es una aplicación, y sea $\mathscr{C}'$ una semi-álgebra sobre Ω'. Pruebe que $f^{-1}(\mathscr{C}')$ es una semi-álgebra sobre Ω.

12. Sean $A, B \subset \Omega$. Demuestre que $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B} = \max\{1_A, 1_B\}$. También demuestre que $1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B = \max\{1_A, 1_B\}$.

13. Muestre que si $A \subset B \subset \Omega$, demuestre que $1_A \leq 1_B$.

14. Sea $f : \Omega \to \Omega'$ una aplicación. Para cada $A \subset \Omega$ definimos

$$f(A) := \{f(\omega) : \omega \in A\} \subset \Omega'.$$

   Pruebe los siguientes resultados

   (i) $f(\emptyset) = \emptyset$, pero $f(\Omega) \subset \Omega'$ (puede haber inclusión estricta);

(ii) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subconjuntos de Ω. Entonces

$$f(\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha);$$

pero

$$f(\cap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha) \subset \cap_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha), \quad \text{(La inclusión puede ser estricta).}$$

(iii) Si $A \subset B \subset \Omega$, entonces $f(A) \subset f(B)$.

(iv) Son falsas las aseveraciones siguientes:

$$f(\Omega - A) \subset \Omega' - f(A), \quad \Omega' - f(A) \subset f(\Omega - A), \quad (A \subset \Omega).$$

(v) Muestre que si $A \subset \Omega$, entonces $A \subset f^{-1}(f(A))$. Construya un ejemplo donde la inclusión estricta es posible.

(vi) Muestre que si $A' \subset \Omega'$, entonces $f(f^{-1}(A')) \subset A'$. Construya un ejemplo donde la inclusión estricta es posible.

(vii) Para cualquier clase no vacía de $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ de subconjuntos de Ω, definimos

$$f(\mathscr{C}) := \{f(A) : A \in \mathscr{C}\} \subset \mathscr{P}(\Omega').$$

Construya un ejemplo para mostrar que si $\mathscr{F}$ es una sigma-álgebra sobre Ω, entonces $f(\mathscr{F})$ no es necesariamente una sigma-álgebra sobre Ω', aún incluso si pasa que $f(\Omega) = \Omega'$.