Teorema de Bayes

Armando F. Mendoza Pérez
Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas UNACH

Marzo de 2019

Contenido

Contenido

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes, en la teoría de la probabilidad, es una proposición planteada por el teólogo y matemático inglés Thomas Bayes (1702-1761) en 1763, que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio B dado A en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento A dado B. Más generalmente anunciamos el teorema:

Figura :

Teorema de Bayes

Teorema

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *una familia de eventos tales que*

(a) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$*;*

(b) $\Omega = \cup_{k=1}^{n} B_k$*;*

(c) $\mathbb{P}(B_k) > 0$ *para todo* $k = 1, \cdots, n$*.*

Entonces para todo $A \in \mathcal{F}$ *con* $P(A) > 0$*, y para cada* $j = 1, \cdots, n$

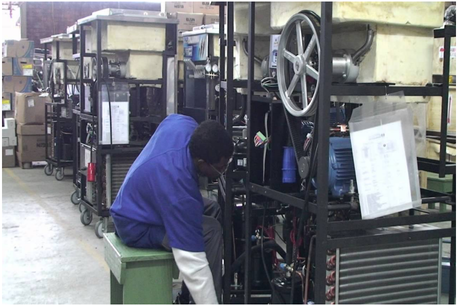
$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}$$

Contenido

Artículos defectuosos

Ejemplo

En una fábrica hay dos máquinas. La máquina 1 *realiza el* $60\,\%$ *de la producción total y la máquina* 2 *el* $40\,\%$*. De su producción total, la máquina* 1 *produce* $3\,\%$ *de material defectuoso, la* 2 *el* $5\,\%$*. El asunto es que se ha encontrado un material defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que este material defectuoso provenga de la máquina* $M2$*?*



Problema artículos defectuosos

Solución

En este caso el espacio muestral Ω consiste en todo el material producido por la fábrica. Sea $M1$ el evento: *La máquina 1 produjo el material escogido*, $M2$ el evento: *La máquina 2 produjo el material escogido* y finalmente sea D el evento: *El material escogido es defectuoso*. El problema es encontrar $\mathbb{P}(M2|D)$ y obervamos que la información que tenemos es $\mathbb{P}(D|M2)$.

Claramente $(M1, M2)$ es una partición del espacio muestral, con $\mathbb{P}(M1) = 0{,}6$, y $\mathbb{P}(M2) = 0{,}4$. Además, claramente $\mathbb{P}(D|M1) = 0{,}03$, y $\mathbb{P}(D|M2) = 0{,}05$.Por el teorema de Bayes

$$\mathbb{P}(M2|D) = \frac{\mathbb{P}(M2)\mathbb{P}(D|M2)}{\mathbb{P}(M1)\mathbb{P}(D|M1) + \mathbb{P}(M2)\mathbb{P}(D|M2)} = ?$$

Problema artículos defectuosos
Solución

En este caso el espacio muestral Ω consiste en todo el material producido por la fábrica. Sea $M1$ el evento: *La máquina 1 produjo el material escogido*, $M2$ el evento: *La máquina 2 produjo el material escogido* y finalmente sea D el evento: *El material escogido es defectuoso*. El problema es encontrar $\mathbb{P}(M2|D)$ y obervamos que la información que tenemos es $\mathbb{P}(D|M2)$.

Claramente $(M1, M2)$ es una partición del espacio muestral, con $\mathbb{P}(M1) = 0{,}6$, y $\mathbb{P}(M2) = 0{,}4$. Además, claramente $\mathbb{P}(D|M1) = 0{,}03$, y $\mathbb{P}(D|M2) = 0{,}05$.Por el teorema de Bayes

$$\mathbb{P}(M2|D) = \frac{\mathbb{P}(M2)\mathbb{P}(D|M2)}{\mathbb{P}(M1)\mathbb{P}(D|M1) + \mathbb{P}(M2)\mathbb{P}(D|M2)} = ?$$

Problema artículos defectuosos

Solución

En este caso el espacio muestral Ω consiste en todo el material producido por la fábrica. Sea $M1$ el evento: *La máquina 1 produjo el material escogido*, $M2$ el evento: *La máquina 2 produjo el material escogido* y finalmente sea D el evento: *El material escogido es defectuoso*. El problema es encontrar $\mathbb{P}(M2|D)$ y obervamos que la información que tenemos es $\mathbb{P}(D|M2)$.
Claramente $(M1, M2)$ es una partición del espacio muestral, con $\mathbb{P}(M1) = 0{,}6$, y $\mathbb{P}(M2) = 0{,}4$. Además, claramente $\mathbb{P}(D|M1) = 0{,}03$, y $\mathbb{P}(D|M2) = 0{,}05$. Por el teorema de Bayes

$$\mathbb{P}(M2|D) = \frac{\mathbb{P}(M2)\mathbb{P}(D|M2)}{\mathbb{P}(M1)\mathbb{P}(D|M1) + \mathbb{P}(M2)\mathbb{P}(D|M2)} = ?$$

Problema artículos defectuosos
Solución

En este caso el espacio muestral Ω consiste en todo el material producido por la fábrica. Sea $M1$ el evento: *La máquina* 1 *produjo el material escogido*, $M2$ el evento: *La máquina* 2 *produjo el material escogido* y finalmente sea D el evento: *El material escogido es defectuoso*. El problema es encontrar $\mathbb{P}(M2|D)$ y obervamos que la información que tenemos es $\mathbb{P}(D|M2)$.
Claramente $(M1, M2)$ es una partición del espacio muestral, con $\mathbb{P}(M1) = 0{,}6$, y $\mathbb{P}(M2) = 0{,}4$. Además, claramente $\mathbb{P}(D|M1) = 0{,}03$, y $\mathbb{P}(D|M2) = 0{,}05$.Por el teorema de Bayes

$$\mathbb{P}(M2|D) = \frac{\mathbb{P}(M2)\mathbb{P}(D|M2)}{\mathbb{P}(M1)\mathbb{P}(D|M1) + \mathbb{P}(M2)\mathbb{P}(D|M2)} = ?$$

Test PCR para detectar el ébola

El test para detectar el ébola (PCR de “polymerase chain reaction”) acierta (da positivo) en el $99{,}6\,\%$ de los pacientes que tienen ébola (positivo). El test también acierta en (da negativo) en el $99{,}7\,\%$ de los pacientes que no tienen ébola. Digamos que un $0{,}2\,\%$ de los pasajeros provenientes de África viajan infectados con el virus. Por tanto, ¿cuál es la probabilidad de tener ébola para una persona que ha dado positivo?.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba, P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.

Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.

Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) = ?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el 40 % de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba, P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.

Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.

Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) = ?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el $40\,\%$ de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba, P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.

Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.

Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) = ?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el $40\,\%$ de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba, P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.
Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.
Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) =?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el $40\,\%$ de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba, P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.
Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.
Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) =?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el $40\,\%$ de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba, P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.
Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.
Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) =?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el $40\,\%$ de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba, P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.
Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.
Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) =?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el $40\,\%$ de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba, P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.
Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.
Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) = ?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el $40\,\%$ de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Test PCR para detectar el ébola

Sea Ω el espacio muestral de todos los individuos que se hacen la prueba,P el evento de los individuos que dieron positivo en la prueba y N el evento de los individuos que dieron negativo en la prueba. Sea E el evento de los individuos que tienen ébola.
Se tienen los siguientes datos: $\mathbb{P}(E) = 0{,}002$, $\mathbb{P}(P|E) = 0{,}996$, $\mathbb{P}(N|\mathcal{C}E) = 0{,}997$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{C}E) = 0{,}998$, $\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E) = 0{,}003$.
Se quiere calcular $\mathbb{P}(E|P) =?$.

Por el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E) + \mathbb{P}(\mathcal{C}E)\mathbb{P}(P|\mathcal{C}E)}$$

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}996}{0{,}002 \cdot 0{,}996 + 0{,}998 \cdot 0{,}003} = 0{,}399.$$

Así el $40\,\%$ de los individuos que dan positivo en la prueba del ébola poseen esa enfermedad, por lo que la prueba no es efectiva.

Contenido

Bibliografía

- W. W. Daniel, *Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud.* Ed. Limusa-Wiley, Cuarta edición (2005).
- S. M. Ross, *Introduction to Probability Models.* Academic Press, 11th. Edition (2014).
- G. C. Canavos, *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos.* McGraw-Hill (1999) .
- G. Grimmett, D. Stirzaker, *Probability and Random Processes.* Oxford University Press, third edition (2001).