Teorema de la probabilidad total. El problema de Monty Hall.

Armando F. Mendoza Pérez
Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas UNACH

Marzo de 2019

Contenido

Contenido

Teorema de la probabilidad total

Teorema

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *una familia de eventos tales que*

(a) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$*;*

(b) $\Omega = \cup_{k=1}^{n} B_k$*;*

(c) $\mathbb{P}(B_k) > 0$ *para todo* $k = 1, \cdots, n$*.*

Entonces dado cualquier evento $A \in \mathcal{F}$*, vale*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k).$$

Teorema de la probabilidad total

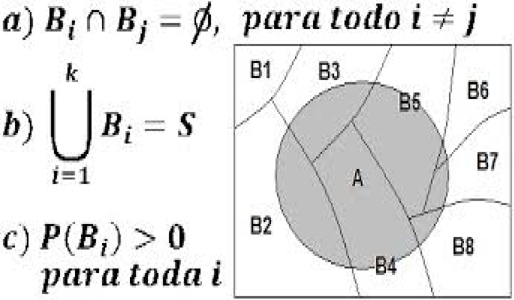

Figura :

Demostración del teorema de la probabilidad total

Demostración

Como $\{B_k\}_{k=1}^n$ *es una partición del espacio muestral* Ω*, obtenemos que para cualquier evento* A*, vale* $A = \cup_{k=1}^n A \cap B_k$*, donde la unión es disjunta de acuerdo a los incisos (a) y (b).*

Entonces, por aditividad de la probabilidad y por el inciso (c)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(B_k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k). \end{aligned}$$

Demostración del teorema de la probabilidad total

Demostración

Como $\{B_k\}_{k=1}^n$ *es una partición del espacio muestral* Ω*, obtenemos que para cualquier evento* A*, vale* $A = \cup_{k=1}^n A \cap B_k$*, donde la unión es disjunta de acuerdo a los incisos (a) y (b).*
Entonces, por aditividad de la probabilidad y por el inciso (c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(B_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}(A | B_k).
\end{aligned}$$

Contenido

Problema de objetos defectuosos

Tuercas

En la fábrica de tuercas "MITORNILLO, S.A." han hecho un estudio sobre las tres máquinas que hacen tuercas de 6/17 pulgadas. Se sabe que la máquina A produce el $25\,\%$ de las tuercas; la segunda máquina B produce el $45\,\%$ de las tuercas y la máquina C, el $30\,\%$ restante. También se han calculado las tuercas defectuosas que produce cada máquina. A produce un $2\,\%$, B un $3\,\%$ y C un $1\,\%$.

Si cogemos una tuerca al azar de entre todas las fabricadas en la última hora. ¿Qué probabilidad existe de que sea defectuosa?

Problema de objetos defectuosos

Tuercas

En la fábrica de tuercas "MITORNILLO, S.A."han hecho un estudio sobre las tres máquinas que hacen tuercas de 6/17 pulgadas.Se sabe que la máquina A produce el $25\,\%$ de las tuercas; la segunda máquina B produce el $45\,\%$ de las tuercas y la máquina C, el $30\,\%$ restante. También se han calculado las tuercas defectuosas que produce cada máquina. A produce un $2\,\%$, B un $3\,\%$ y C un $1\,\%$.

Si cogemos una tuerca al azar de entre todas las fabricadas en la última hora. ¿Qué probabilidad existe de que sea defectuosa?

Problema de objetos defectuosos

Tuercas

En la fábrica de tuercas "MITORNILLO, S.A."han hecho un estudio sobre las tres máquinas que hacen tuercas de 6/17 pulgadas. Se sabe que la máquina A produce el $25\,\%$ de las tuercas; la segunda máquina B produce el $45\,\%$ de las tuercas y la máquina C, el $30\,\%$ restante. También se han calculado las tuercas defectuosas que produce cada máquina. A produce un $2\,\%$, B un $3\,\%$ y C un $1\,\%$.

Si cogemos una tuerca al azar de entre todas las fabricadas en la última hora. ¿Qué probabilidad existe de que sea defectuosa?

Problema de objetos defectuosos

Tuercas

En la fábrica de tuercas "MITORNILLO, S.A." han hecho un estudio sobre las tres máquinas que hacen tuercas de 6/17 pulgadas. Se sabe que la máquina A produce el $25\,\%$ de las tuercas; la segunda máquina B produce el $45\,\%$ de las tuercas y la máquina C, el $30\,\%$ restante. También se han calculado las tuercas defectuosas que produce cada máquina. A produce un $2\,\%$, B un $3\,\%$ y C un $1\,\%$.
Si cogemos una tuerca al azar de entre todas las fabricadas en la última hora. ¿Qué probabilidad existe de que sea defectuosa?

Problema de objetos defectuosos

Solución al problema de tuercas

Consideremos el espacio muestral Ω por el conjunto de todos las tuercas de tornillos fabricados en la última hora. A. B y C los eventos que consisten en que dichas tuercas son fabricadas por las máquinas A, B y C, respectivamente.

Claramente $\{A, B, C\}$ es una partición de Ω, con $\mathbb{P}(A) = 0{,}25$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}45$ y $\mathbb{P}(C) = 0{,}3$ las probabilidades que que sean fabricadas en sendas máquinas.

Sea D el evento que consiste en que la tuerca elegida es defectuosa Se quiere calcular $\mathbb{P}(D)$. Entonces, de acuerdo a los datos,

$$\mathbb{P}(D|A) = 0{,}02, \qquad \mathbb{P}(D|B) = 0{,}03, \qquad \mathbb{P}(D|C) = 0{,}01.$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D|B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D|C) =$$

$$0{,}02 \cdot 0{,}25 + 0{,}03 \cdot 0{,}45 + 0{,}01 \cdot 0{,}30 = 0{,}005 + 0{,}0135 + 0{,}003 = 0{,}0215$$

Problema de objetos defectuosos

Solución al problema de tuercas

Consideremos el espacio muestral Ω por el conjunto de todos las tuercas de tornillos fabricados en la última hora. A. B y C los eventos que consisten en que dichas tuercas son fabricadas por las máquinas A, B y C, respectivamente.

Claramente $\{A, B, C\}$ es una partición de Ω, con $\mathbb{P}(A) = 0{,}25$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}45$ y $\mathbb{P}(C) = 0{,}3$ las probabilidades que que sean fabricadas en sendas máquinas.

Sea D el evento que consiste en que la tuerca elegida es defectuosa Se quiere calcular $\mathbb{P}(D)$. Entonces, de acuerdo a los datos,

$$\mathbb{P}(D|A) = 0{,}02, \qquad \mathbb{P}(D|B) = 0{,}03, \qquad \mathbb{P}(D|C) = 0{,}01.$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D|B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D|C) =$$

$$0{,}02 \cdot 0{,}25 + 0{,}03 \cdot 0{,}45 + 0{,}01 \cdot 0{,}30 = 0{,}005 + 0{,}0135 + 0{,}003 = 0{,}0215$$

Problema de objetos defectuosos

Solución al problema de tuercas

Consideremos el espacio muestral Ω por el conjunto de todos las tuercas de tornillos fabricados en la última hora. A. B y C los eventos que consisten en que dichas tuercas son fabricadas por las máquinas A, B y C, respectivamente.

Claramente $\{A, B, C\}$ es una partición de Ω, con $\mathbb{P}(A) = 0{,}25$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}45$ y $\mathbb{P}(C) = 0{,}3$ las probabilidades que que sean fabricadas en sendas máquinas.

Sea D el evento que consiste en que la tuerca elegida es defectuosa Se quiere calcular $\mathbb{P}(D)$. Entonces, de acuerdo a los datos,

$$\mathbb{P}(D|A) = 0{,}02, \qquad \mathbb{P}(D|B) = 0{,}03, \qquad \mathbb{P}(D|C) = 0{,}01.$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D|B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D|C) =$$

$$0{,}02 \cdot 0{,}25 + 0{,}03 \cdot 0{,}45 + 0{,}01 \cdot 0{,}30 = 0{,}005 + 0{,}0135 + 0{,}003 = 0{,}0215$$

Problema de objetos defectuosos
Solución al problema de tuercas

Consideremos el espacio muestral Ω por el conjunto de todos las tuercas de tornillos fabricados en la última hora. A. B y C los eventos que consisten en que dichas tuercas son fabricadas por las máquinas A, B y C, respectivamente.
Claramente $\{A, B, C\}$ es una partición de Ω, con $\mathbb{P}(A) = 0{,}25$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}45$ y $\mathbb{P}(C) = 0{,}3$ las probabilidades que que sean fabricadas en sendas máquinas.
Sea D el evento que consiste en que la tuerca elegida es defectuosa Se quiere calcular $\mathbb{P}(D)$. Entonces, de acuerdo a los datos,

$$\mathbb{P}(D|A) = 0{,}02, \qquad \mathbb{P}(D|B) = 0{,}03, \qquad \mathbb{P}(D|C) = 0{,}01.$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D|B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D|C) =$$

$$0{,}02 \cdot 0{,}25 + 0{,}03 \cdot 0{,}45 + 0{,}01 \cdot 0{,}30 = 0{,}005 + 0{,}0135 + 0{,}003 = 0{,}0215$$

Problema de objetos defectuosos

Solución al problema de tuercas

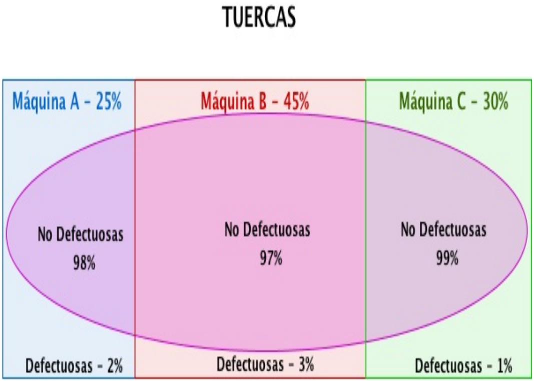

Figura :

Es decir, existe una probabilidad del $0{,}0215$ de que una tuerca escogida al azar sea defectuosa.

Problema de objetos defectuosos

Solución al problema de las bombilla

Problema de los focos

Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?

Problema de objetos defectuosos

Solución al problema de los focos

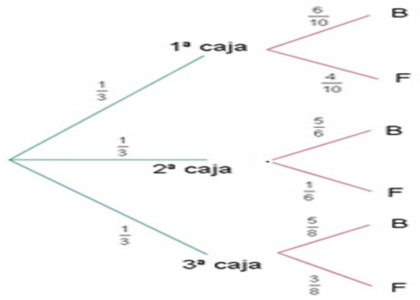

Figura :

$$\mathbb{P}(\text{fundida}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

Contenido

El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad que está inspirado por el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal(Hagamos un trato). , famoso entre 1963 y 1986. Su nombre proviene del presentador, Monty Hall.

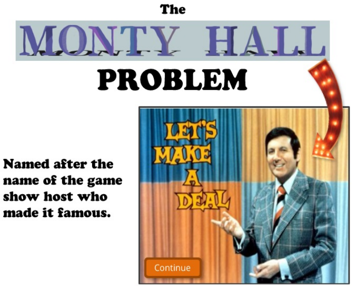

Figura :

Problema de Monty-Hall

Explicación del problema

En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe donde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?.

Problema de Monty-Hall

Explicación del problema

En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe donde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?.

Problema de Monty-Hall

Explicación del problema

En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe donde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?.

Problema de Monty-Hall

¿Cuál sería la opción correcta?

1. Quedarse con la puerta inicial;
2. Cambiar a la otra puerta;
3. Es irrelevante cambiar o no cambiar.

A primera vista parece obvio que da igual (opción 3). La intuición nos dice que ahora, quitando una puerta sin premio, la puerta que nosotros escogimos tiene un 50 % de tener una cabra y por tanto da igual cambiar que no hacerlo.

Problema de Monty-Hall

¿Cuál sería la opción correcta?

1. Quedarse con la puerta inicial;
2. Cambiar a la otra puerta;
3. Es irrelevante cambiar o no cambiar.

A primera vista parece obvio que da igual (opción 3). La intuición nos dice que ahora, quitando una puerta sin premio, la puerta que nosotros escogimos tiene un $50\,\%$ de tener una cabra y por tanto da igual cambiar que no hacerlo.

Problema de Monty-Hall
Solución gráfica

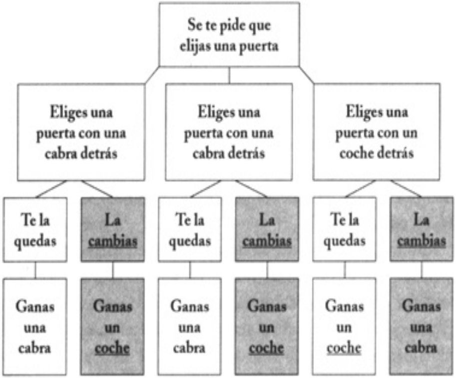

Figura :

Problema de Monty-Hall
Solución probabilística

Sea A: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio antes de cambiar de opción;note que $\mathbb{P}(A) = 1/3$.
Sea B: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio después de cambiar de opción;note que B y A son excluyentes $(B \cap A = \emptyset)$y que $P(B|\complement A) = 1$.

Por el teorema de la probabilidad total,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\complement A)P(B|\complement A) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Problema de Monty-Hall

Solución probabilística

Sea A: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio antes de cambiar de opción;note que $\mathbb{P}(A) = 1/3$.

Sea B: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio después de cambiar de opción;note que B y A son excluyentes $(B \cap A = \emptyset)$y que $P(B|CA) = 1$.

Por el teorema de la probabilidad total,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(CA)P(B|CA) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Problema de Monty-Hall

Solución probabilística

Sea A: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio antes de cambiar de opción;note que $\mathbb{P}(A) = 1/3$.

Sea B: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio después de cambiar de opción;note que B y A son excluyentes $(B \cap A = \emptyset)$y que $P(B|\complement A) = 1$.

Por el teorema de la probabilidad total,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\complement A)P(B|\complement A) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Problema de Monty-Hall

Solución probabilística

Sea A: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio antes de cambiar de opción;note que $\mathbb{P}(A) = 1/3$.

Sea B: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio después de cambiar de opción;note que B y A son excluyentes $(B \cap A = \emptyset)$y que $P(B|\complement A) = 1$.

Por el teorema de la probabilidad total,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\complement A)P(B|\complement A) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Problema de Monty-Hall

Solución probabilística

Sea A: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio antes de cambiar de opción;note que $\mathbb{P}(A) = 1/3$.

Sea B: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio después de cambiar de opción;note que B y A son excluyentes ($B \cap A = \emptyset$)y que $P(B|\mathcal{C}A) = 1$.

Por el teorema de la probabilidad total,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\mathcal{C}A)P(B|\mathcal{C}A) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Problema de Monty-Hall

Solución probabilística

Sea A: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio antes de cambiar de opción;note que $\mathbb{P}(A) = 1/3$.
Sea B: el evento en que el concursante elige la puerta con el premio después de cambiar de opción;note que B y A son excluyentes $(B \cap A = \emptyset)$y que $P(B|\mathcal{C}A) = 1$.

Por el teorema de la probabilidad total,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\mathcal{C}A)P(B|\mathcal{C}A) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Problema de Monty-Hall

Ejercicio

Simulación

Haga un programa que simule el problema de Monty-Hall para el caso en que siempre el jugador toma la opción de cambiar su elección.

Contenido

Bibliografía

- S. M. Ross, *Introduction to Probability Models.* Academic Press, 11th. Edition (2014).
- G. C. Canavos, *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos.* McGraw-Hill (1999) .
- G. Grimmett, D. Stirzaker, *Probability and Random Processes.* Oxford University Press, third edition (2001).