Probabilidad. Lista 3.

1. Considere una v.a. X con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Estudie la función de densidad correspondiente $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad -\infty < x < \infty.$$

Halle sus puntos críticos (máximos y mínimos), sus puntos de inflexión, asíntotas. Bosqueje su gráfica. Compruebe los resultados obtenidos, haciendo la gráfica por computadora.

(b) Considere la función de distribución de probabilidad $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Estudie sus asíntotas, puntos críticos y puntos de inflexión. Haga un bosquejo de su gráfica.

(c) Sea Z v.a. $N(0,1)$. Demuestre que $F_X(x) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(d) Demuestre que la probabilidad de que la v.a. X se encuentre $1, 2$ y 3 veces la desviación estándar σ de la media, es decir $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq \sigma) = F_Z(1) - F_Z(-1) =?$, $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 2\sigma) = F_Z(2) - F_Z(-2) =?$, $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 3\sigma) = F_Z(3) - F_Z(-3) =?$.

2. Sea X una v.a. que representa la inteligencia medida por medio de pruebas CI. Si X es $N(100, 100)$, obtener las probabilidades de que X sea mayor que 100, menor que 85, y entre 95 y 120. Halle la media y la varianza.

3. Considere una v.a. con distribución gamma de parámetroa $\alpha > 0$ y $\theta > 0$. Demuestre que el r-ésimo momento

$$\mu_r = \mathbb{E}X^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x; \alpha, \theta)\, dx = \frac{\theta^r \Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}.$$

De aquí demuestre que $\mathbb{E}X = \alpha\theta$ y $\mathrm{var}(X) = \alpha\theta^2$.

4. Sea X v.a. con distribución Bernoulli, que toma el valor de 1 si hay un éxito ó 0 si hay un fracaso, con $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, y $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

(a) Demuestre que la función de densidadde probabilidad es

$$f_X(x) := \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{si } x = 0, 1, \\ \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

(b) Encuentre la f.d.p. $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y haga un bosquejo de su gráfica.

(c) Halle $\mathbb{E}X$ y $\mathrm{var}(X)$.

5. Sea X una v.a. con distribución binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Demuestre que $\mathbb{E}X = np$, y $\mathrm{var}(X) = npq$.

6. Encuentre el segundo y tercer momento de una v.a. X distribuida uniformemente sobre el intervalo $(0, 1)$. Haga la simulación en octave (o matlab, scilab, etc.), y obtenga los valores promedios simulados de X^2 y X^3. Compare con el resultado teórico.

7. Sea X una v.a. con ditribución Beta de parámetro $\alpha > 0, \beta > 0$. Sea $r > 0$. Demuestre que el r-ésimo momento de X es

$$\mathbb{E}X^r = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+r)}.$$

   Encuentre $\mathbb{E}X$ y $\mathrm{var}(X)$.

8. Considere una v.a. X con distribución de Weibull de parámetros α y $\theta > 0$.

(a) Encuentre explícitamente la función de distribución de probabilidad F_X.

(b) Dado $r > 0$ demuestre que

$$\mathbb{E}X^r = \theta^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{\alpha}\right).$$

(c) De aquí encuentre $\mathbb{E}X$ y $\mathrm{var}(X)$.

9. Suponga que X es v.a. con distribución binomial de parámetros $0 < p < 1$, y $n \in \mathbb{N}$. Encuentre $\mathbb{E}X^3$ y $\mathbb{E}X^4$ usando su función generadora de momentos.

10. Suponga que X es v.a. con distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Use la función generadora de momentos para encontrar el momento $\mathbb{E}X^4$. Haga lo mosmo si X es v.a. con distribución exponencial de parmetro $\alpha > 0$.

11. Una pista de aterrizaje en un aeropuerto tiene un costo de mantenimieto que depende del número de llegadas por día. Dicha función de costo es un polinomio de grado cuatro dado por

$$C(n) = 1 + 2n^2 + 3n^3 + 4n^4, \quad (\text{ en dólares})$$

donde n es el número de aviones que aterrizaron durante el día. Si el número de aviones que aterrizan por día está modelada por una v.a. de Poisson con parámetro $\lambda = 15$ aviones/día, encuentre el costo esperado por día.

12. Una pieza metálica se rompe después de sufrir dos ciclos de esfuerzo. Si estos ciclos ocurren de manera independiente a una frecuencia promedio de 2 por cada 100 horas, obtener la probabilidad de que el tiempo que transcurre antes de que el material se rompa se encuentre dentro de: a) una desviación estándar del tiempo promedio; y b) a más de dos desviaciones estándar por encima de la media. Recuerde que la v.a. que modela el problema es una gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\theta = 100/2 = 50$ horas.