Probabilidad II-MCM. Lista 1.

1. Si X es una v.a. no-negativa, pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{E}X \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

   De aquí pruebe que $\mathbb{E}X < \infty$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < \infty$.

2. Sean $X_1, X_2, \cdots$, v.a. i.i.d. de Bernoulli, con

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = k) &= p \qquad \text{si } k = 1 \\ &= 1 - p \quad \text{si } k = -1. \quad 0 \leq p \leq 1, p \neq 1/2. \end{aligned}$$

   Demuestre que $\mathbb{P}(S_n \neq 0$ para casi todo $n) = 1$, en donde $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

3. Sean $X_1, X_2, \cdots$ v.a. i.i.d. con media μ finita. Demuestre que para cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$ se tiene

$$f(S_n/n) \to f(\mu) \qquad \text{c.p.1. y en } L^1.$$

4. Sean $X_1, X_2, \cdots$ v.a. i.i.d. con media cero y varianza σ^2 finita. Demuestre que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}\log(n)} \to 0 \qquad \text{c.p.1.}$$

5. Sea $X_1, X_2, \cdots$ una sucesión de v.a. Pruebe que es de Cauchy c.p.1. si y sólo si

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{j,k=m}^{\infty}[|X_j - X_k| \geq \delta]) = 0 \quad \forall \delta > 0.$$