Probabilidad II-MCM. Lista 2.

1. Demuestre que $\mathbb{P}_n \xrightarrow{d} \mathbb{P}$ sí y sólo si cualquier subsucesión $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ de $\{\mathbb{P}_n\}$ contiene una subsucesión $\{\mathbb{P}_{n''}\}$ tal que $\mathbb{P}_{n''} \xrightarrow{d} \mathbb{P}$.

2. Demuestre que si $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ son dos sucesiones de vv.aa. tales que $X_n \xrightarrow{d} X$ y $|X_n - Y_n| \to 0$ en probabilidad, entonces $Y_n \xrightarrow{d} X$.

3. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un boreliano de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X \in \mathrm{Fr}A) = 0$. Demuestre que:

   (a) Si $X_n \to X$ en probabilidad, entonces
   $$\mathbb{P}([X_n \in A]\Delta[X \in A]) \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$
   De aquí concluya que

   (b) Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución.

4. Demuestre que convergencia en distribución no implica necesariamente convergencia en probabilidad. Sin embargo vea el siguiente ejercicio:

5. Sea a una v.a. constante. Demuestre que $X_n \xrightarrow{d} a$ sí y sólo si $X_n \to a$ en probabilidad.

6. Pruebe que si $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} 1$, entonces $X_n Y_n \xrightarrow{d} X$.

7. Sea θ una v.a. distribuida uniformemente sobre $[0, 2\pi]$, y sea $X_k := \mathrm{sen}\,(k\theta)$, $k = 1, 2, \cdots$. Demuestre que $\frac{1}{n}S_n \to 0$ c.p.1., en donde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

8. Sea (Ω, ρ) un espacio métrico, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ la σ-álgebra de Borel sobre Ω, $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \cdots$ medidas de probabilidad borelianas sobre Ω. Demuestre que
   $$\sup_{B \in \mathcal{B}(\Omega)} |\mathbb{P}_n(B) - \mathbb{P}(B)| \to 0 \quad \text{implica que } \mathbb{P}_n \xrightarrow{d} \mathbb{P}.$$
   Dé un ejemplo mostrando que el recíproco es falso.

Nota: Si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son dos medidas de probabilidad sobre un espacio medible arbitrario $(\Omega, \mathcal{F})$, la función $V(P, Q) := 2 \sup_{B \in \mathcal{F}} |\mathbb{P}(B) - \mathbb{Q}(B)|$ se llama la *distancia en variación* o *distancia de Kolmogorov* entre las medidas de probabilidad $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$.