Probabilidad II-MCM. Lista 3.

1. Demuestre que la función

$$f(x) = \frac{c}{\pi}(c^2 + x^2)^{-1}, \quad c > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

   es la densidad de una distribución de probabilidad con función característica $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-c|t|}$. La función f se llama *densidad de Cauchy con parámetro c.*

   Si $X_1, \cdots, X_n$ son vv.aa. independientes con distribución de Cauchy con la misma c, calcule la distribución de S_n/n, con $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

2. Use funciones características para verificar que una combinación lineal de vv.aa. independientes normalmente distribuidas también es normal (es decir, si X_k tiene distribución $N(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \cdots, n$, entonces $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ tiene distribución $N(a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2)$.

3. Supóngase que $\int_{\mathbb{R}} |x|^n \, dF(x) < \infty$ para algún entero positivo $n > 0$, y sea φ la función característica de F. Demuestre que la n-ésima derivada $\varphi^{(n)}(t)$ de φ existe, es continua y satisface:

$$\varphi^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^n \mathrm{e}^{itx} \, dF(x).$$

   En particular, nótese que $\varphi^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n)$.

4. Demuestre que si φ es una función característica, entonces en *no-negativa definida*, es decir, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$, $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, vale

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} \geq 0.$$

5. Si $X = (X_1, \cdots, X_n)$ es un vector aleatorio n-dimensional, su función característica conjunta se define como

$$\varphi(u) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{iu \cdot X}) \quad \text{para todo } u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

en donde

$$u \cdot X = \sum_{j=1}^{n} u_j X_j,$$

ó equivalentemente

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{iu\cdot x}\, dF(x),$$

con $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, y " $\cdot$ " es el producto interno euclidiano canónico en $\mathbb{R}^n$, donde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la f.d.p. de X. Demuestre que:

(a) $\varphi(0) = 1$, con $0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$;

(b) $|\varphi(u)| \leq 1$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$;

(c) φ es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}^n$;

(d) Si $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ es un vector aleatorio definido por $Y_k = a_k + b_k X_k$, con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ para $k = 1, \cdots, n$. Pruebe que la función característica ψ de Y es

$$\psi(u) = \mathrm{e}^{ia\cdot u}\varphi(b_1 u_1, \cdots, b_n u_n), \qquad a = (a_1, \cdots, a_n).$$

6. Sea $X \sim \Gamma(p, b)$ una v.a. con distribución gamma con parámetros p y b. Use el ejercicio 3 para probar que $\mathbb{E}X = p/b$, $\mathbb{E}X^2 = p(p+1)/b^2$, y por lo tanto, $\mathrm{var}(X) = p/b^2$.

7. Sean $X_1, \cdots, X_n$ v.a. independientes con $X_k \sim \Gamma(p_k, b)$, $k = 1, \cdots, n$. Demuestre que $X_1 + \cdots + X_n$ tiene distribución $\Gamma(p_1 + \cdots + p_n, b)$. En particular, si $X_k \sim \Gamma(p, b)$, $k = 1, \cdots, n$, son vv.aa. i.i.d., entonces

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(np, b).$$

8. Pruebe que si $X \sim N(0, 1)$, entonces $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.

9. Sean $X_1, \cdots, X_n$ v.a. i.i.d., con $X_k \sim N(0, 1)$. Pruebe que la v.a. *ji-cuadrada con n grados de libertad*:

$$\chi^2_{(n)} := X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

tiene distribución $\Gamma(n/2, 1/2)$. Demuestre de aquí que $\mathbb{E}(\chi^2_{(n)}) = n$ y $\mathrm{var}(\chi^2_{(n)}) = 2n$.

10. Obtenga resultados similares al problema precedente si $X_k \sim N(0, \sigma^2)$.