Probabilidad II-MCM. Lista 4.

1. Sean $X_1, X_2, \cdots$ vv.aa. i.i.d. con distribución uniforme sobre el intervalo $(0,1)$; es decir, para cada $n = 1, 2, \cdots$, X_n tiene la distribución F

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad \text{si } x \leq 0 \\ &= x \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ &= 1 \quad \text{si } x \geq 1. \end{aligned}$$

   Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Use el teorema de Lévy para demostrar que

$$\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \xrightarrow{d} X, \qquad \text{cuando } n \to \infty,$$

   donde $X \sim N(0,1)$.

2. Sea μ_n la medida de probabilidad concentrada en el punto $x_n \in \mathbb{R}$ (es decir, $\mu_n(B) = 1$ si $x_n \in B$, 0 en caso contrario). Demuestre que $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$ si y sólo si $x_n \to x$, y que μ debe ser la medida de probabilidad concentrada en x.

3. Sea $\Omega = [0,1]$, y sea μ_n la medida discreta que asigna la masa $1/(n+1)$ a cada uno de los puntos $0, 1/n, 2/n, \cdots, n/n$. Demuestre que $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, en donde μ es la medidad de Lebesgue restringida a Ω.

4. Use el teorema de Lévy para demostrar el *teorema límite de Poisson*: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $X_i^{(n)}$ vv.aa. independientes tales que

$$\mathbb{P}(X_i^{(n)} = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i^{(n)} = 0) = p_i^{(n)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, k(n).$$

   Supóngase que

$$\sum_{i=1}^{k(n)} p_i^{(n)} \to \mu; \qquad \max_{1 \leq i \leq k(n)} p_i^{(n)} \to 0$$

   cuando $n \to \infty$. Entonces $X_1^{(n)} + \cdots X_{k(n)}^{(n)} \xrightarrow{d} X$, donde X es una v.a. de Poisson con parámetro μ.