Probabilidad II-MCM. Lista 5.

1. Sean $X_1, X_2, \cdots$ sucesiones arbitrarias de vv.aa. Dado cualquier número real c, muestre que siempre se pueden encontrar constantes a_n y b_n ($a_n > 0$) de tal forma que $a_n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n - b_n)$ convergen en distribución a la v.a. $X \equiv c$.

2. Sea $\{X_{nk} : n = 1, 2, \cdots, \ k = 1, \cdots, n\}$ una sucesión doble de vv.aa., y sea h_{nk} la función característica de X_{nk}. Muestre que los X_{nk} satisfacen la condición de d.a.u., es decir,

$$\max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}(|X_{nk}| \geq \epsilon) \to 0$$

   cuando $n \to \infty$, para cada $\epsilon > 0$, si y solamente si

$$\max_{1\leq k\leq n} |h_{nk}(u) - 1| \to 0$$

   cuando $n \to \infty$, y en este caso, la convergencia es uniforme sobre cada intervalo acotado.

   Indicación: Puede usar la desigualdad de truncamiento establecida en el lema **??**.

3. Sean $X_1, X_2, \cdots$ vv.aa. independientes , definidas como sigue:

   $X_1 = \pm 1$, con igual probabilidad.

   Si $k > 1$, y c es un número real fijo mayor que 1,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_k = 1) &= \mathbb{P}(X_k = -1) = \tfrac{1}{2c} \\ \mathbb{P}(X_k = k) &= \mathbb{P}(X_k = -k) = \tfrac{1}{2k^2}\left(1 - \tfrac{1}{c}\right) \\ \mathbb{P}(X_k = 0) &= 1 - \tfrac{1}{c} - \tfrac{1}{k^2}\left(1 - \tfrac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

   De aquí definimos

$$X'_{nk} := \begin{cases} X_k & \text{si} \quad |X_k| \leq \sqrt{n}, \\ 0 & \text{si} \quad |X_k| > \sqrt{n}. \end{cases}$$

   Establezca lo siguiente:

(a) Las X_k/c_n satisfacen la condición de d.a.u., donde $c_n^2 := \mathrm{var}(S_n)$, con $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

(b) La condición de Lindeberg falla para las X_k, pero se cumple para las X'_{nk}. Más aún, si $S'_n := \sum_{k=1}^n X'_{nk}$, entonces $S'_n/c'_n \xrightarrow{d} N(0,1)$, donde ${c'_n}^2 := \mathrm{var}(S'_n) \sim_{n\to\infty} n/c$

(c) $\mathbb{P}(S_n \neq S'_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(d) $\sqrt{c}S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,1)$, pero $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,1)$ no se tiene.