Probabilidad II-MCM. Lista 6.

1. Sea $X \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ v.a. integrable, y sea $\mathfrak{B}$ una sub-sigma álgebra de $\mathfrak{F}$. Definamos
$$\varphi(B) := \int_B X \, dP, \qquad \text{para todo } B \in \mathfrak{B}.$$
Pruebe que φ es una medida signada finita sobre $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$, la cual es absolutamente continua con respecto a la restricción de P sobre $(\Omega, \mathfrak{B})$.

2. Sean $X, Y \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathfrak{B}, P)$. Pruebe que $X = Y$ c.s. si y sólo si
$$\int_B X \, dP = \int_B Y \, dP, \qquad \text{para todo } B \in \mathfrak{B}.$$

3. Pruebe que toda función convexa es continua.

4. Pruebe que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces ó bien g es monótona, ó existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que g es decreciente en el intervalo $(-\infty, x_0]$, y creciente en el intervalo $[x_0, \infty)$.

5. Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, y sea $\mathfrak{B}$ la sub-sigma álgebra generada por los intervalos $\{[0, \frac{1}{4}], (\frac{1}{4}, \frac{2}{3}], (\frac{2}{3}, 1]\}$, y sea $X(\omega) = \omega^2$ para todo $\omega \in \Omega = [0, 1]$. Demuestre que $E[X|\mathfrak{B}]$ se puede expresar como
$$E[X|\mathfrak{B}] = a_1 I_{[0,\frac{1}{4}]} + a_2 I_{(\frac{1}{4},\frac{2}{3}]} + a_3 I_{(\frac{2}{3},1]}.$$
Calcule las constantes a_1, a_2, a_3.

6. Si Y es una v.a. discreta tal que $P(Y = y_n) > 0$ para cada $n = 1, 2, \cdots$, y $\sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y_n) = 1$. Dado $X \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, definamos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como
$$\varphi(y) = \begin{cases} \int_\Omega X \, dP(\cdot|[Y = y_n]) & \text{si} \quad y = y_n; \\ \\ 0 & \text{si} \quad y \notin \{y_n\}. \end{cases}$$
Pruebe que $\varphi(y) = E[X|Y = y]$ μ_Y-c.s.

7. Pruebe las afirmaciones hechas en el ejemplo 6.2.12.