Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

.

Notas del Curso de Física I.

por

César Alvarez Ochoa

Objetivo General

Estas notas tiene por objetivo proporcionar en forma escrita los temas tratados en cada una de las clases del curso de Física I, además de servir de apoyo adicional a la bibliografía proporcionada al inicio de cada semestre. Servirán también como material de apoyo para que el alumno conozca, se familiarice, comprenda y aplique los conceptos básicos de la física y pueda preparar exámenes mensuales.

Forma de Evaluación:

4 exámenes parciales 70%

Participación 5%

Tareas 25%

Objetivo Particular

Al término de las clases correspondientes a estas unidades y la revisión de este material el alumno será capaz de resolver problemas de cinemática. Tendrá las nociones básicas de punto material, tiempo absoluto y espacio absoluto. Podrá describir el movimiento de una partícula con velocidad constante, con aceleración constante, y podrá derivar las leyes de coservacion del momento lineal y angular para un sistema de partículas utilizando las leyes de Newton.

0.1 Indice:

1 Introducción.

La mecánica clásica es la parte de la física que esta más relacionada con la experiencia humana. Los fenómenos físicos que describe se relacionan a nuestro sentido común.

La mecánica clásica es valida solo cuando consideramos cuerpos moviendose a velocidades pequeas comparadas con la velocidad de la luz que es de 300 mil kilómetros por segundo. Para comparar, la velocidad de un avión es de 1000 kilómetros por hora en promedio. Existe otra restricción importante en la valides de la mecánica clásica y es es que solo es valida para dimesiones mucho mayores a las dimensiones atómicas. La mecánica clásica falla en describir el movimiento de un electrón alrededor de su nucleo atómico por ejemplo.
La mecánica se divide para su estudio en cinemática y dinámica. La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin atender las causas que lo producen.
Antes de ir más adelante tenemos que entender que es el movimiento de los cuerpos. Pensemos en un cuerpo que esta aislado en el universo, entonces decimos que no tiene sentido hablar del movimiento de este cuerpo. Esto es así, por que solo tiene significado físico hablar de movimiento en realción a otros cuerpos que sirven de referencia, a los que llamaremos sistemas de referencia. Concluimos que si no existe un sistema de referencia al cual podamos referir el movimiento, no podemos hablar de movimiento. Supongamos que tenemos un sistema de referencia, entonces para este sistema de referencia el movimiento más simple que puede observar que existe en la naturaleza será el movimiento a velocidad constante y en linea recta.

Galieo Galilei demostró en sus experimentos con planos inclinados y balines, que no se necesita de una fuerza para que un cuerpo se mueva como establecía la física de Aristóteles. Entonces un cuerpo se moverá a velocidad constante y en linea recta a menos que exista un fuerza que actue sobre el cuerpo y cambie su velocidad y direción. Esto ultimo se conoce como la primera Ley de Newton o Ley de la inercia.

1.1 ¿Qué estudia la Física?

La física es una ciencia que se encarga del estudio matemático de las relaciones que existen entre la materia y la energía en cualquiera de sus formas. El estudio de estas relaciones se hace desde el nivel más fundamental de interacción.

1.2 Mediciones

Para poder llegar a un conocimiento objetivo de la naturaleza tenemos que medir las propiedades de la materia y la energía. Podríamos decir: 'Si no se puede medir, no existe".

Para medir las diferentes propiedades de la materia y la energía el ser humano ha inventado un sistema de medidas llamado: Sistema Internacional S.I. en cual a su vez se divide en dos sistemas: el sistema MKS que significa Metro, Kilogramo, Segundo y el sistema cgs que significa centímetro, gramo, segundo.

Cuando se escribe una ecuación, cada una de las variables simbolizan cantidades físicas, éstas cantidades físicas se miden con alguna unidad en el SI. Estas unidades deben estar en el mismo sistema MKS o cgs. Cabe mencionar que existe otro sistema de medida llamado Sistema Inglés que no usaremos en este curso.

1.3 ¿Qué es el movimiento?

Contestar a este pregunta no es sencillo por los prejuicios que traemos con nosotros y por la limitación de nuestros sentidos.

Como ya habíamos comentada anteriormente, siempre que hablemos de movimiento, este tiene que ser con respecto a algo (un árbol, la carretera, el piso, etc). No tiene sentido hablar de movimiento si no decimos con respecto a que nos movemos. Respecto a que nos movemos en física se llama sistema de referencia. Un sistema de referencia simple se construye utilizando 3 ejes perpendiculares uno con respecto a los otros a los que llamaremos x y y z. Donde se interceptan estos tres ejes le llamaremos origen del sistema de coordenadas y corresponde a las coordenadas (0,0,0). Una regla y un reloj nos servirán para medir distancias al origen de coordenadas y tiempos a un objeto que se mueve en el espacio de nuestro sistema, de manera que podamos ubicar su posición en cada momento.

Dado un sistema de referencia, podemos decir que el movimiento es el cambio de posición con respecto a este sistema de referencia.

1.4 Sistema de Referencia Inercial (SRI)

Para definir estos sistemas hace falta introducir otro concepto que en física se conoce como velocidad. La velocidad es el ritmo con que un objeto cambia su posición con respecto a un sistema de referencia. Un sistema de referencia inercial es aquel que se mueve a velocidad constante con respecto a otros sistema de referencia, es decir, su posición cambia de manera constante en el tiempo. Vale la pena mencionar que Isaac Newton pensaba que existía un sistema de referencia inercial absoluto, esto es un sistema universal al cual se podían referir todos los movimientos en el universo, este sistema de referencia de absoluto se le conocía como éter. El éter llenaba todo el espacio que hay en el universo.

En realidad, en el mundo en que vivimos no existe un sistema de referencia absoluto y todos los sistemas de referencia pasan a ser sistemas de referencia relativos, relativos al observador que los define. El movimiento pasa a ser entonces una cantidad relativa.

Una vez que se define un sistema de referencia inercial, todos aquellos sistemas que se muevan a velocidad constante con respecto a este sistema serán también sistemas de referencias inerciales.

Una vez que tenemos un sistema al cual referir el movimiento podemos encontrar propiedades intrinsecas del espacio. Por ejemplo, con respecto a un sistema de referencia un objeto que mueva en linea recta y a velocidad constante es equivalente a otro objeto que se mueva a otra velocidad (en otro dirección) constante y en linea recta, entonces el espacio tiene propiedades que son independientes de la dirección, decimos entonces que el espacio es homogeneo, es decir todas las direcciones son equivalentes.

Por otro lado, si varios sistemas de referencia u observadores estudian el movimiento de un cuerpo que se mueve a velocidad contante y en linea recta, este cuerpo se moverá con esas propiedades así definidas para todos los sistemas de referencia, independientemente de la posición que tengan en el espacio. El espacio es homogeneo, es dicir todos los lugares del espacio son fisicamente equivalentes, no existe un observador preferente.

Definimos a un sistema de referencia inercial como todo aquel sistema de referencia que se mueva con velocidad constante y en linea recta con respecto a otro sistema de referencia que a su vez es inercial. En un sistema de referencia inercial las ecuaciones que describen la los fenómenos físicos conservan su forma, es decir, las leyes de la física son validas en todos los sistemas de referencia inerciales.

Un enunciado importante debido a Galileo Galilei es el siguiente:

"Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales" Esto implica que la forma de las ecuaciones que describen el movimiento son la misma en todos los sistemas de referencia inerciales.

1.5 Transformaciones de Galileo

Nos relaciona las observaciones de posición y velocidad de un objeto que hacen dos personas ubicados en dos sistemas de referencia inerciales S y $S^{'}$, donde el observador $S^{'}$ se mueve a velocidad V con respecto al observador S, Figura 1.

$$x^{'} = x + Vt \tag{1}$$

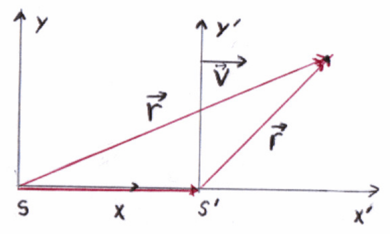

Figure 1: Relación entre los vectores en dos sistemas de referencia inerciales.

$$y^{'} = y \tag{2}$$

$$z^{'} = z \tag{3}$$

$$t^{'} = t \tag{4}$$

Tiempo Absoluto Tiempo absoluto significa que los intervalos de tiempo entre dos sucesos es el mismo para todos los observadores del Universo.

$$\Delta t^{'} = \Delta t \tag{5}$$

Ejemplo: La lluvia tarda una hora para todos los observadores del universo independientemente de como se muevan.

Espacio Absoluto Espacio Absoluto significa que la distancia entre dos puntos es la misma para todos los observadores del universo.

$$\Delta x^{'} = \Delta x \tag{6}$$

Ejemplo: Un lápiz mide lo mismo para todos los observadores del universo independientemente de como se muevan.

Tiempo Relativo Tiempo relativo significa que los intervalos de tiempo entre dos sucesos dependen de quien los mida, esto es, que la duración de un suceso no es el mismo para todos los observadores del universo.

Espacio Relativo Espacio relativo significa que la distancia entre dos puntos depende de quien mide esa distancia, esto es, que la distancia entre dos puntos no es la misma para todos los observadores del universo.

1.6 Cinemática

La cinemática es la rama de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin atender a las causas que lo producen, es decir, sin conocer las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.

Para hablar de movimiento de una partícula tenemos que especificar con respecto a que se mueve dicha partícula, es decir, tenemos que definir un sistema de referencia. Un sistema de referencia es un sistema cartesiano con un reloj. Si no existe un sistema de referencia, hablar de movimiento carece de sentido físico.

1.7 Vector de Posición y sus Derivadas Temporales

Supongamos que una partícula de masa m se mueve a lo largo de una trayectoria C entonces su posición con respecto a un sistema de referencia K va a estar dada por el vector de posición $\vec{r}$

Se observa de la figura que la posición $\vec{r}$ depende del punto que tomemos como origen.

El número de valores necesarios para especificar la posición de una partícula esta vinculada con la dimensión del espacio donde trabajemos. Así, por ejemplo, en un espacio de 1 dimensión necesitamos solo un valor o coordenada, en un espacio de 2 dimensiones necesitamos 2 valores o dos coordenadas y así sucesivamente.

En sistemas de una dimensión el vector de posición $\vec{r}$ lo podemos escribir como

$$\vec{r} = xi, \tag{7}$$

donde x es la distancia al origen de coordenadas ei es la dirección, a la derecha o izquierda del origen, en este caso como i es positiva, decimos que es a la derecha del origen de coordenadas. En 2 dimensiones el vector de posición se puede especificar con

$$\vec{r} = xi + yj \tag{8}$$

donde las variables x y y son las distancias respectivas al origen a lo largo de cada uno de los ejes del sistema de coordenadas cartesianos. Las variables i y j son las direcciones a lo largo de dichos ejes. Para un sistema de coordenadas de 3 dimensiones el vector de posición esta dada por:

$$\vec{r} = xi + yj + zk \tag{9}$$

No todos los sistemas de coordenadas son cartesianos, hay sistemas de coordenadas polares en dos dimensiones, hay sistema de coordenadas cilíndrico y esférico en 3 dimensiones y muchísimos otros que aquí no estudiaremos. En la resolución de problemas nosotros escogeremos el sistema de coordenadas que más nos convenga. En coordenadas cartesianas $\vec{r}$ puede escribirse como

$$\vec{r} = xi + yj + zk \tag{10}$$

donde i, j y k son vectores unitarios en la dirección de cada uno de los ejes cartesianos x, y y z. Es decir estamos ubicado la posición de un objeto en un espacio que consta de 3 dimensiones. En un espacio de una y dos dimensiones precisamos solo de una y dos coordenadas respectivamente.

La velocidad $\vec{v}$ de un punto material esta entonces dada por la derivada con respecto al tiempo t del vector de posición $\vec{r}$. Es decir, la velocidad esta dada por el ritmo de cambio del vector de posición i.e.:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{11}$$

Si el sistema de referencia no gira entonces los vectores unitarios permanecen constantes y nos queda la velocidad como:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k \tag{12}$$

En el caso más general estos vectores varían de dirección y el sistema de referencia es no inercial quedando la velocidad como:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}i + x\frac{di}{dt} + \frac{dy}{dt}j + y\frac{dj}{dt} + \frac{dz}{dt}k + z\frac{dk}{dt} \tag{13}$$

Donde las derivadas de los vectores unitarios i, j y k indican el ritmo de cambio de dirección de los ejes, es decir, el sistema esta girando. Ejemplo: Un avión sin control que se mueve azarosamente en el cielo.

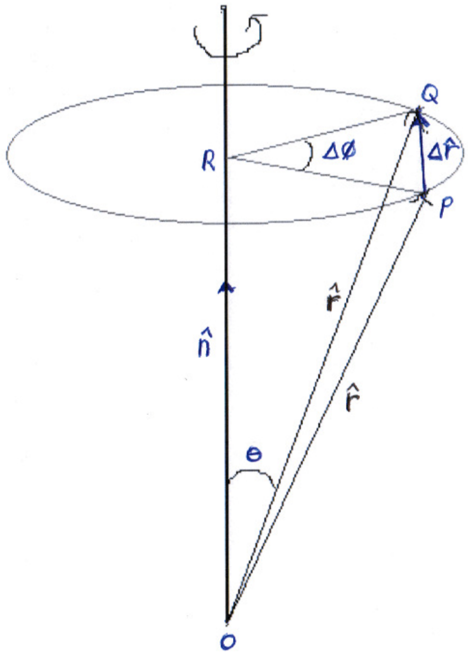

Figure 2: Representación de la variación del vector unitario

La figura 2 nos ayudará a encontrar una expresión matemática que me indique como varía un vector unitario. Observamos que el extremo del vector unitario $\hat{r}$ describe un circulo con centro en el punto donde pasa el eje de giro. Por lo tanto se cumple la siguiente relación:

$$\Delta\hat{r} = \overline{PQ}\Delta\phi \tag{14}$$

Ademas de la inclinación del vector unitario con respecto al eje de giro se cumple la relaciòn

$$\overline{PQ} = \overline{OQ}\sin\theta \tag{15}$$

pero $\overline{OQ} = 1$ por ser unitario. Sustituyendo $\overline{PQ}$ en $\Delta\hat{r}$ nos queda:

$$\Delta\hat{r} = \Delta\phi\sin\theta \tag{16}$$

Ahora sabemos que el producto cruz de los vectores unitarios $\hat{\eta}$ y $\hat{r}$

$$\|\hat{\eta}\times\hat{r}\| = \sin\theta \tag{17}$$

Utilizando la regla de la mano derecha, sabemos que el vector $\hat{\eta}\times\hat{r}$ esta en la misma dirección del vector $\Delta\hat{r}$

Por lo tanto nos queda:

$$\Delta\hat{r} = \Delta\phi\hat{\eta}\times\hat{r} \tag{18}$$

Definimos a la velocidad angular

$$\vec{\omega} = \frac{\lim}{\Delta t\to\infty}[\frac{\Delta\phi}{\Delta t}]\hat{\eta} \tag{19}$$

donde $\hat{\eta}$ es un vector unitario que apunto en la dirección del eje instantáneo de giro.. Finalmente la expresión matemática que describe la variación en el tiempo Δt de dirección de un vector unitario.

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{r} \tag{20}$$

Sabiendo como varía el vector unitario, podemos empezar a preguntarnos como varía un vector, por ejemplo, el vector de posisción $\vec{r}$ con el tiempo. La velocidad $v$de una partícula entonces se describe por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} \tag{21}$$

Aplicando la regla para derivar un producto encontramos:

$$\frac{d(r\hat{r})}{dt} = r\frac{d(\hat{r})}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{r} \tag{22}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$\frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r(\vec{\omega} \times \hat{r}) \tag{23}$$

o lo que es lo mismo:

$$\vec{v} = (\frac{dr}{dt})\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{24}$$

El tt́ermino entre concretes es la velocidad radial. Esta última expresión nos describe de manera muy general como varía la velocidad de una partícula.

1.8 Aceleración

Una vez que conocemos la velocidad de una part'icula con respecto a un sistema de referencia, podemos encontrar la aceleracin instantnea, definida como el cambio en el tiempo de la velocidad.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(\frac{dr}{dt})\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] \tag{25}$$

Derivando esta ecuación aplicando la regla distributiva obtenemos:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(\frac{dr}{dt})\hat{r}\right] + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right] \tag{26}$$

Aplicando ahora la regla que deriva un producto, obtenemos:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(\frac{dr}{dt})\right]\hat{r} + (\frac{dr}{dt})\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}\right] \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\left[\vec{r}\right] \tag{27}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + v_r\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left[(\frac{dr}{dt})\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] \tag{28}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_r\hat{r} + v_r(\vec{\omega} \times \hat{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times v_r\hat{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{29}$$

Donde hemos definido a $\frac{dr}{dt}$ como la velocidad radial v_r, $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ la definimos como la aceleración angular $\vec{\alpha}$ y $\frac{d^2r}{dt^2}$ como la magnitud de la acelecarión radial a_r. Simplificando los té minos semejantes finalmente obtenemos:

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + 2\vec{\omega} \times (v_r\hat{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{30}$$

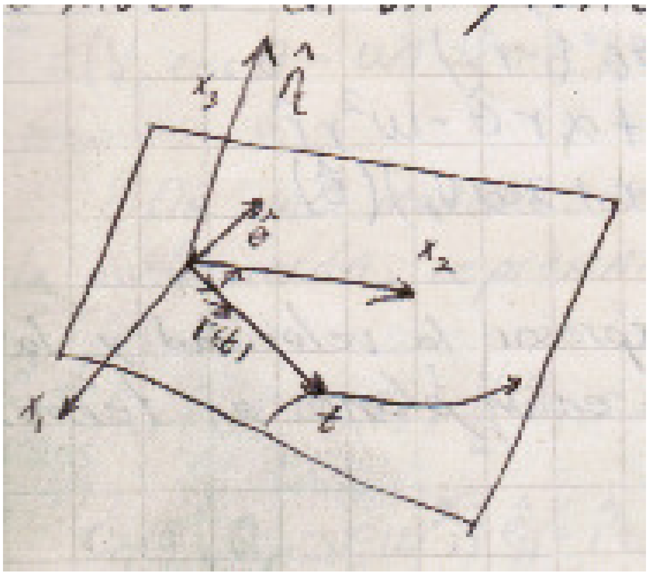

Figure 3: Proyección de la velocidad en un plano

Los resultados anteriores determinan la velocidad y la aceleración de una partícula respecto a cierto observador completamente arbitrario y en forma general.

Supongamos el caso partócular en el que la partícula se mueve en un plano arbitrario, entonces la velocidad de la partícula puede escribirse como:

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + \omega r\hat{\theta} \tag{31}$$

donde $\hat{r} \perp \hat{\theta}$. La aceleración queda dada en el plano como:

$$\vec{a} = (a_r - r\omega^2)\hat{r} + (\alpha r + 2\omega v_r)\hat{\theta} \tag{32}$$

1.9 Movimiento Rectilinio Uniforme

Una partícula de masa m se desplaza a través de una trayectoria C recta y se observa que recorre distancias iguales en tiempos iguales decimos que dicho cuerpo se mueve con velocidad constante en una línea recta. Este movimiento es el más simple de los movimientos y esta matemáticamente descrito por

$$V = \frac{d}{t} \tag{33}$$

donde d es la distancia y t es el tiempo.

1.10 Movimiento con Aceleración Constante

Una partícula de masa m se desplaza por una trayectoria C y se observa que su velocidad cambia con el tiempo. Decimos que este cuerpo tiene un movimiento con aceleración constante si su velocidad se incremente o disminuye una cantidad contante en tiempos iguales. Una partícula cuya velocidad cambia en una cantidad contante cada segundo es un movimiento con aceleración constante. Por ejemplo, la aceleración de la gravedad, su valor es g=9.8 m/s/s es decir que la velocidad cambia 9.8m/s cada segundo, al cabo de 2 segundos la velocidad será 19.4 m/s .

Las ecuaciones que describen dicho movimiento son:

$$a = \text{const} \tag{34}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{35}$$

$$r(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + r_0 \tag{36}$$

Donde r_0 y v_0 son la posición y la velocidad inicial (condiciones iniciales) de la partícula, t es el tiempo.

Un ejemplo de este movimiento es un cuerpo en caída libre donde $a = g$=9.8 m/s2 que es la aceleración de la gravedad.

Galileo en un experimento muy sencillo que consista en dejar caer bolas en un plano inclinado y en un anlisis brillante de sus observaciones dedujo que la distancia d que recorría la bola en las diferentes unidades de tiempo bajo aceleración constante a estaba descrita por una ecuación cuadratica en el tiempo t.

$$d(t) = at^2 \tag{37}$$

Posteriormente Galileo demostró que esta misma ley describía el movimiento de un objeto en caída libre.

1.11 Tiro Parabólico

Este movimiento resulta de la combinación del movimiento rectilinio uniforme en la dirección horizontal o eje x, y el movimiento con aceleración constante en la dirección vertical o eje y. Las ecuaciones que gobiernan dicho movimiento en cada dirección son las ecuaciones que ya hemos estudiado anteriormente.

La composición de velocidad constante y aceleración constante da un movimiento parabólico (Figura 3). De la combinación de estas encontramos la distancia máxima (x_{max}) y altura máxima (y_{max})alcanzada respectivamente y el tiempo de vuelo (T_{max}).

$$x_{max} = \frac{V_o \sin(2\alpha)}{g} \tag{38}$$

$$y_{max} = \frac{V_o^2 \sin^2 \alpha}{2g} \tag{39}$$

$$T_{max} = \frac{2V_o \sin \alpha}{g} \tag{40}$$

Igulamente la extrapolación del movimiento parabólido al movimiento de la Luna se encuentra que el movimiento de la Luna se puede describir utilizando las ecuaciones del movimiento parabólico. (se queda como ejercicio demostrarlo).

2 Conservación del Momento Lineal.

La segunda Ley de Newton como sabemos expresa el efecto de causa y efecto en el caso del movimiento mecánico . Por un lado la causa (la interacción que produce el cambio en el tiempo del estado de movimiento mecánico. La medida de la interacción de la fuerza. Por otro lado, el estado de movimiento; la medida de esté es lo que se llama el momento lineal de la partícula

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{41}$$

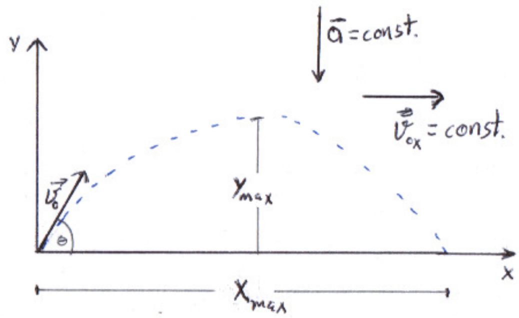

Figure 4: Trayectoria parabólica descrita por un objeto sometido a una aceleración constate en la direccin vertical y una velocidad constate en la dirección horizontal

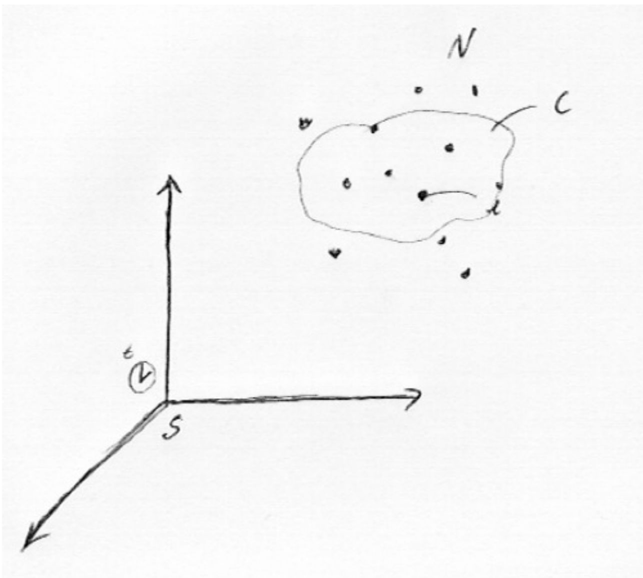

Figure 5:

En estas condiciones la formulación mas general de la segunda ley de Newton es:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{42}$$

En el case particular en el que la masa del cuerpo permanece constante, entonces la segunda ley de Newton tiene la forma que hemos utilizado

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{43}$$

Supongamos que estamos examinando el movimiento de un conjunto de partículas que interaccionan entre si, respecto de un observador inercia. Consideremos una parte cualquiera de este sistema de cuerpos (Subsistema).

Supongamos que este subsistema esta formado por N partículas y consideremos que la masa de las N partículas son $m_1, m_2, ..., m_N$ en general diferentes. Las partículas del subsistema interacionan entre si y además interacionan con otros cuerpos fuera del subsistema. En estas condiciones la fuerza (medida de la interacción) que experimenta una da las partículas del subsistema la podemos separar en dos partes:

$$\vec{F}_i = (\vec{F}_i)_{\text{interna}} + (\vec{F}_i)_{\text{externa}} \tag{44}$$

En donde $(\vec{F}_i)_{\text{interna}}$ es la fuerza que experimenta la partícula i del subsistema debido a su interacción con las demás partículas del subsistema; por $(\vec{F}_i)_{\text{externa}}$ entendemos la fuerza que experimenta la partícula i del subsistema debido a su interacción con las demás partículas que están fuera del subsistema.

La fuerza interna que experimenta la partícula i la podemos escribir de la siguiente manera:

$$(\vec{F}_i)_{\text{interna}} = \sum \vec{F}_{ij} \tag{45}$$

Donde i pertenece al subsistema y donde $\vec{F}_i)_{\text{interna}}$ nos simboliza la fuerza que experimenta la partícula i debido a la interacción con la partícula i

$$\vec{F}_i = \sum \vec{F}_{ij} + (\vec{F}_i)_{\text{externa}} \tag{46}$$

de la tercera ley de Newton tenemos

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{47}$$

por otro lado de la segunda ley de Newton tenemos:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \tag{48}$$

donde $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$

por lo tanto combinando estas ecuaciones tenemos:

$$\sum \vec{F}_{ij} + (\vec{F}_i)_{\text{externa}} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \tag{49}$$

Definimos el momento lineal total del subsistema C como:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \vec{P}(t) \tag{50}$$

Como las partículas están en interacción (interna y externamente) entonces en general el momento lineal total cambia con el tiempo. De la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{dp_i}{dt} \tag{51}$$

donde la sumatoria se realiza sobre todas las partículas j del subsistema.

Sustituyendo la derivada del momento lineal por la fuerza tenemos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum [\sum \vec{F}_{ij} + (\vec{F}_i)_{\text{externa}}] \tag{52}$$

o

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{ij} \vec{F}_{ij} + \sum_{i\in C} (\vec{F}_i)_{\text{externa}} \tag{53}$$

donde

$$\sum_{ij\in C} \vec{F}_{ij} = 0 \tag{54}$$

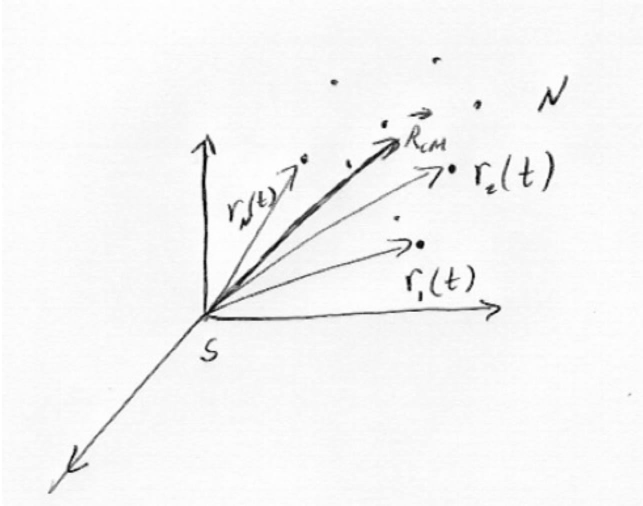

Figure 6: Sistema de Paríiculas

Debido a la tercera ley de Newton $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ la suma de las fuerzas internas es cero. Luego entonces el cambio en el tiempo del momento lineal total del sistema se debe únicamente a las fuerzas externas.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i \in C} (\vec{F}_i)_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{externa}} \tag{55}$$

Si $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ entonces

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \tag{56}$$

Por lo que concluimos que $\vec{P}$ es una constante.

2.1 Vector de Centro de Masa

Consideremos un sistema de N partículas cuyas masas son $m_1, m_2, ..., m_N$ en general este sistema de partículas puede ser un subsistema, supongamos que en un instante de tiempo la posición de cada una de las partículas que están formando al subsistema son: $r(t)_1, r(t)_2, ..., r(t)_N$

Definimos el vector de centro de masa del sistema de particulas considerado como:

$$R_{CM}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i(t) \tag{57}$$

Donde M es la llamada masa total del sistema es:

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{58}$$

En general la posición de las partículas que están formando al sistema puede cambiar con el tiempo, por lo tanto, en general, el vector de centro de masa depende del tiempo. Determinamos la variación en el tiempo del vector del centro de masa y supongamos que la masa de las partículas permanece constante. Entonces tenemos:

$$\delta R_{CM}(t) = \delta[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i(t)] \tag{59}$$

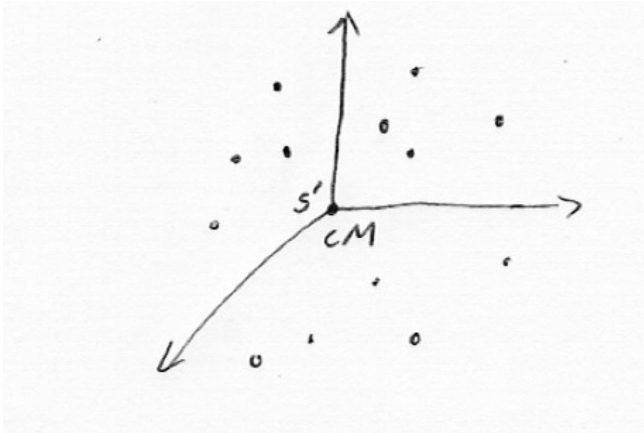

Figure 7:

Como la masa total M y la masa de cada partícula m_i es constante, entonces nos queda:

$$\delta R_{CM}(t) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \delta r_i(t) \tag{60}$$

Si este cambio se realiza en un tiempo δt

$$\frac{\delta R_{CM}(t)}{\delta t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\delta r_i(t)}{\delta t} \tag{61}$$

entonces

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{\vec{P}}{M} \tag{62}$$

Entonces

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM} \tag{63}$$

Comparando este resultado con la definición de momento lineal de una partícula, llegamos a la conclusión, que el centro de masa del sistema de partículas se esta comportando como si fuese una partícula cuya masa es la masa total del sistema M y cuyo momento lineal es, el momento lineal total del sistema Observamos de este resultado lo siguiente: Si el momento lineal del sistema permanece constante ósea que la fuerza externa sobre el sistema es cero. entonces, la ecuación anterior implica que la velocidad del centro de masa es constante como si fuese una partícula libre. Otra conclusión del del resultado de la anterior ecuación es: si el origen de nuestro sistema de referencia lo colocamos en el centro de masa el momento total del sistema vale cero, dado que $V_{CM} = 0$ lo que implica que $\vec{P} = 0$

Nos preguntamos si un observador colocado en el centro de masa de un sistema de partículas será un inercia en general. Si el observador S fuese inercia este debería de moverse respecto de un SRI S cid velocidad constante, $\vec{V}_{CM}$= constante entonces $\vec{P}$= constante entonces $\vec{F}$=0. Observamos entonces que el observador S es inercia solamente en el que el momento total del sistema permanezca constante, ósea, que la fuerza externa total sobre el sistema tiene que ser cero,

2.2 Momento Angular

Supongamos una partícula de masa m que esta siendo observada moverse con respecto a un observador S, y sean $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ el vector de posición y la velocidad de la partícula en un cierto instante de tiempo

t. Se define el momento angular $\vec{l}$ de la partícula respecto del sistema S como:

$$\vec{l}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) \tag{64}$$

donde $\vec{p} = m\vec{v}$. Podemos observar en general que el momento angular de la partícula depende del tiempo, luego entonces es importante encontrar la variación en el tiempo del momento angular de la partícula y a que se debe este cambio.

$$\delta_t \vec{l}(t) = \delta_t \left[\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)\right] = \delta_t \vec{r}(t) \times \vec{p} + \vec{r}(t) \times \delta_t \vec{p} \tag{65}$$

pero

$$\delta_t \vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \tag{66}$$

y de la segunda ley de Newton $\delta_t p = \vec{f}$ donde $\vec{f}$ es la fuerza que experimenta la partícula debido a su interacción con otros cuerpos.

$$\delta_t \vec{l}(t) = \vec{v}(t) \times \vec{p} + \vec{r}(t) \times \vec{f} \tag{67}$$

pero $\vec{v} \times \vec{p} = 0$ entonces

$$\delta_t \vec{l}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{f} \tag{68}$$

se define la torca que experimenta m como

$$\vec{T} = \vec{r}(t) \times \vec{f} \tag{69}$$

lo que implica que la torca $\vec{T}$ es igual al cambio en el tiempo del momento angular de la partícula de masa m, es decir:

$$\delta_t \vec{l}(t) = \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{T} \tag{70}$$

Si comparamos esta expresión con la segunda ley de Newton

$$\delta_t \vec{p}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \tag{71}$$

observamos que son expresiones muy similares. Existe sin embaígo una diferencia esencial entre la fuerza y la torva: Mientras $\vec{f}$ depende exclusivamente del tipo de interacción, ósea depende de las características de los cuerpos que están interactuando, en $\vec{T}$ existe un elemento relativo que es el vector de posición de la partícula, esto significa que si tomamos otro observador en otro origen de coordenadas la torva sería diterente, en cambio la fuerza sigue siendo la misma.

Supongamos dos observadores inerciales S y S', entonces para S la torva viene dada por

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{f} \tag{72}$$

mientras que para el observador S' la torva viene dada por:

$$\vec{T} = \vec{r}' \times \vec{f} \tag{73}$$

Por la transformaciones de Galileo tenemos que:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \tag{74}$$

entonces

$$\vec{T} = (\vec{r}' + \vec{R}) \times \vec{f} = \vec{r}' \times \vec{f} + \vec{R} \times \vec{f} \tag{75}$$

o lo que es lo mismo

$$\vec{T} = \vec{T}' + \vec{R} \times \vec{f} \tag{76}$$

La expresión $\vec{T} = d\vec{l}/dt$ que nos da el cambio en el tiempo del momento angular, es valida, únicamente para sistemas de referencia inerciales ya que para llegar a $\vec{T}$ utilizamos la segunda ley de Newton.

3 Bibliografía

- Kittel, C., Knight, W.D., Ruderman, M.A. (1973). Berkeley Physics Course, Vol. 1, Mecánica. Editorial Reverté.
- Alonso, M., Finn, E. J. (1995). Física. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Resnick, R., Halliday, D., & Krane. (1987). Física, 5a Edición, CECSA. Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. (1987). The Feynman
- Lectures on Physics Vol. 1 Física. Mass. USA: Addison Wesley. Read.
- Apuntes del Curso de Física I de Peña, BUAP(1988)