UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
CENTRO DE ESTUDIOS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS BÁSICAS Y APLICADAS

Álgebra IV
Tarea 7

1. (a) Pruebe que una relación E en A es de equivalencia si y sólo si $Id_A \subset E$, $E = E^{-1}$ y $E = E \circ E$;
   (b) Si R es una relación reflexiva y transitiva en $A = domR$, muestre que $E = R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia en A.
2. (a) Considere la relación E en $\mathbb{R}^2$ definida por $E = \{((x,y),(u,w)) : y - x^2 = w - u^2\}$. Muestre que E es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia módulo E;
   (b) Sean $E = \{(x,y) : y = x+1\}$ y $E' = \{(x,y) : y - x \in \mathbb{Z}\}$ dos relaciones en $\mathbb{R}$. Muestre que E' es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ y que $E \subset E'$ y describa las clases de equivalencia módulo E'. ¿Es E una relación de equivalencia?
   (c) Sea $f : X \to Y$ una función. Muestre que
      i. $E_f = \{(x,y) : f(x) = f(y)\}$ es una relación de equivalencia en X,
      ii. Las clases de equivalencia módulo E_f son precisamente los conjuntos $f^{-1}(\{y\})$ para $y \in f(X)$.
3. Sean S y R relaciones de equivalencia en A, con $S \subset R$. Defina $R/S = \{([a]_S, [b]_S) : \exists a' \in [a]_S, \exists b' \in [b]_S$ tales que $(a', b') \in R\}$. Muestre que R/S es una relación de equivalencia en el conjunto cociente A/S y que hay una biyección de $(A/S)/(R/S)$ en A/R.
4. Sea $\mathcal{M}$ una familia de relaciones de equivalencia en A, muestre que
   (a) $\bigcap \mathcal{M}$ es una relación de equivalencia en A;
   (b) existe una relación de equivalencia E en A tal que $R \in \mathcal{M}$ implica que $R \subset E$ y que si E' es una relación de equivalencia en A y $\forall R \in \mathcal{M}$, $R \subset E'$, entonces $E \subset E'$.

Dr. Hugo Villanueva Méndez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
CENTRO DE ESTUDIOS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS BÁSICAS Y APLICADAS

Álgebra IV
Tarea 7

1. (a) Pruebe que una relación E en A es de equivalencia si y sólo si $Id_A \subset E$, $E = E^{-1}$ y $E = E \circ E$;
   (b) Si R es una relación reflexiva y transitiva en $A = domR$, muestre que $E = R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia en A.
2. (a) Considere la relación E en $\mathbb{R}^2$ definida por $E = \{((x,y),(u,w)) : y - x^2 = w - u^2\}$. Muestre que E es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia módulo E;
   (b) Sean $E = \{(x,y) : y = x+1\}$ y $E' = \{(x,y) : y - x \in \mathbb{Z}\}$ dos relaciones en $\mathbb{R}$. Muestre que E' es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ y que $E \subset E'$ y describa las clases de equivalencia módulo E'. ¿Es E una relación de equivalencia?
   (c) Sea $f : X \to Y$ una función. Muestre que
      i. $E_f = \{(x,y) : f(x) = f(y)\}$ es una relación de equivalencia en X,
      ii. Las clases de equivalencia módulo E_f son precisamente los conjuntos $f^{-1}(\{y\})$ para $y \in f(X)$.
3. Sean S y R relaciones de equivalencia en A, con $S \subset R$. Defina $R/S = \{([a]_S, [b]_S) : \exists a' \in [a]_S, \exists b' \in [b]_S$ tales que $(a', b') \in R\}$. Muestre que R/S es una relación de equivalencia en el conjunto cociente A/S y que hay una biyección de $(A/S)/(R/S)$ en A/R.
4. Sea $\mathcal{M}$ una familia de relaciones de equivalencia en A, muestre que
   (a) $\bigcap \mathcal{M}$ es una relación de equivalencia en A;
   (b) existe una relación de equivalencia E en A tal que $R \in \mathcal{M}$ implica que $R \subset E$ y que si E' es una relación de equivalencia en A y $\forall R \in \mathcal{M}$, $R \subset E'$, entonces $E \subset E'$.

Dr. Hugo Villanueva Méndez