UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
CENTRO DE ESTUDIOS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS BÁSICAS Y APLICADAS

Álgebra IV
Tarea 8

1. (a) Sea R una relación reflexiva y transitiva. Defina $\approx$ en A por $a \approx b$ si y sólo si (aRb) y (bRa). Muestre que $\approx$ es una relación de equivalencia en A y, si $\ll$ se define por $[a] \ll [b]$ si y sólo si aRb, muestre que $(A/\approx, \ll)$ es un conjunto ordenado;
   (b) Sea R un orden en A. Pruebe que R^{-1} es también un orden en A (se llama *dual* de R), y para $B \subset A$ se cumple que a es el mínimo elemento de B en R^{-1} si y sólo si a es el máximo elemento de B en R.
   (c) Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ dos conjuntos ordenados. Muestre que $\ll$ es un orden parcial en $A \times B$, donde $\ll$ se define como $(a, b) \ll (x, y)$ si y sólo si $a \leq x$ y $b \preceq y$. El conjunto ordenado $(A \times B, \ll)$ se llama *producto (cartesiano)* de los conjuntos ordenados $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$.

2. Sean $A \neq \emptyset$ y $Pt(A)$ el conjunto de todas las particiones de A. Defina una relación $\leq$ en $Pt(A)$ por: $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$ si y sólo si para todo $B \in \mathcal{S}_1$ existe $C \in \mathcal{S}_2$ tal que $B \subset C$. Cuando $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$ se dice que la partición $\mathcal{S}_1$ es un *refinamiento* de $\mathcal{S}_2$.
   (a) Muestre que $\leq$ es un orden;
   (b) Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in Pt(A)$. Muestre que $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ tiene ínfimo;
   (c) Sea $\mathcal{T} \subset Pt(A)$, $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Muestre que $\inf \mathcal{T}$ y $\sup \mathcal{T}$ existen;

3. Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Una *cortadura* de X es un par de subconjuntos A, B que satisfacen: *(i)* $X = A \cup B$, *(ii)* $A \cap B = \emptyset$ y *(iii)* $a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \leq b$. Si A, B y A', B' son dos cortaduras de X, pruebe que $A \subset A'$ o que $A' \subset A$.

4. Si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado y $a, b \in A$ con $a \leq b$, se define el intervalo cerrado de extremos a y b como el conjunto $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \text{ y } x \leq b\}$. Pruebe que el conjunto de intervalos cerrados ordenados por la inclusión es isomorfo a un subconjunto del producto de $(A, \leq)$ y su dual $(A, \leq^{-1})$.

Dr. Hugo Villanueva Méndez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
CENTRO DE ESTUDIOS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS BÁSICAS Y APLICADAS

Álgebra IV
Tarea 8

1. (a) Sea R una relación reflexiva y transitiva. Defina $\approx$ en A por $a \approx b$ si y sólo si (aRb) y (bRa). Muestre que $\approx$ es una relación de equivalencia en A y, si $\ll$ se define por $[a] \ll [b]$ si y sólo si aRb, muestre que $(A/\approx, \ll)$ es un conjunto ordenado;
   (b) Sea R un orden en A. Pruebe que R^{-1} es también un orden en A (se llama *dual* de R), y para $B \subset A$ se cumple que a es el mínimo elemento de B en R^{-1} si y sólo si a es el máximo elemento de B en R.
   (c) Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ dos conjuntos ordenados. Muestre que $\ll$ es un orden parcial en $A \times B$, donde $\ll$ se define como $(a, b) \ll (x, y)$ si y sólo si $a \leq x$ y $b \preceq y$. El conjunto ordenado $(A \times B, \ll)$ se llama *producto (cartesiano)* de los conjuntos ordenados $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$.

2. Sean $A \neq \emptyset$ y $Pt(A)$ el conjunto de todas las particiones de A. Defina una relación $\leq$ en $Pt(A)$ por: $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$ si y sólo si para todo $B \in \mathcal{S}_1$ existe $C \in \mathcal{S}_2$ tal que $B \subset C$. Cuando $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$ se dice que la partición $\mathcal{S}_1$ es un *refinamiento* de $\mathcal{S}_2$.
   (a) Muestre que $\leq$ es un orden;
   (b) Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in Pt(A)$. Muestre que $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ tiene ínfimo;
   (c) Sea $\mathcal{T} \subset Pt(A)$, $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Muestre que $\inf \mathcal{T}$ y $\sup \mathcal{T}$ existen;

3. Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Una *cortadura* de X es un par de subconjuntos A, B que satisfacen: *(i)* $X = A \cup B$, *(ii)* $A \cap B = \emptyset$ y *(iii)* $a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \leq b$. Si A, B y A', B' son dos cortaduras de X, pruebe que $A \subset A'$ o que $A' \subset A$.

4. Si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado y $a, b \in A$ con $a \leq b$, se define el intervalo cerrado de extremos a y b como el conjunto $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \text{ y } x \leq b\}$. Pruebe que el conjunto de intervalos cerrados ordenados por la inclusión es isomorfo a un subconjunto del producto de $(A, \leq)$ y su dual $(A, \leq^{-1})$.