UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

CENTRO DE ESTUDIOS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS BÁSICAS Y APLICADAS

Álgebra IV

Tarea 11

1. Muestre que
   (a) $\kappa^0 = 1$ para todo κ y $\kappa^1 = \kappa$ para todo $\kappa > 0$;
   (b) $1^{\kappa=1}$ para todo κ y $0^\kappa = 0$ para todo $\kappa > 0$.
   (c) $\kappa^\kappa \leq 2^{\kappa \cdot \kappa}$.

2. Muestre que si existe una función suprayectiva de B en A, entonces $2^{|A|} \leq 2^{|B|}$.

3. (a) Sea I un conjunto de índices. Pongamos $I = J \cup K$, donde J y K son ajenos y no vacíos. Pruebe que existe una función biyectiva de $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \prod_{\alpha\in J} A_\alpha \times \prod_{\alpha\in K} A_\alpha$;
   (b) Sea $I \neq \emptyset$ un conjunto de índices. Considere dos familias indizadas $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Demuestre si $A_\alpha \subset B_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, entonces $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in I} B_\alpha$;
   (c) Muestre que el recíproco de (b) se cumple si $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$.

4. Pruebe que si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia indizada de conjuntos no vacíos, entonces para cualquier conjunto X y cualquier familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de funciones $f_\alpha : X \to A_\alpha$, existe una única función $f : X \to \prod_{\alpha\in I} A_{\alpha\in I}$ tal que para cada $\alpha \in I$, $f_\alpha = p_\alpha \circ f$. Las funciones f_α se llaman funciones coordenadas de f, y a veces f se denota por $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ o$\prod f_\alpha$.

5. Muestre que
   (a) la cardinalidad del conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, ..., 9\}$ es igual a $2^{\aleph_0}$;
   (b) ¿Cuál es la cardinalidad de la familia de conjuntos numerables de números reales?
   (c) ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto de todos los conjuntos finitos de $\mathbb{R}$.

Dr. Hugo Villanueva Méndez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

CENTRO DE ESTUDIOS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS BÁSICAS Y APLICADAS

Álgebra IV

Tarea 11

1. Muestre que
   (a) $\kappa^0 = 1$ para todo κ y $\kappa^1 = \kappa$ para todo $\kappa > 0$;
   (b) $1^{\kappa=1}$ para todo κ y $0^\kappa = 0$ para todo $\kappa > 0$.
   (c) $\kappa^\kappa \leq 2^{\kappa \cdot \kappa}$.

2. Muestre que si existe una función suprayectiva de B en A, entonces $2^{|A|} \leq 2^{|B|}$.

3. (a) Sea I un conjunto de índices. Pongamos $I = J \cup K$, donde J y K son ajenos y no vacíos. Pruebe que existe una función biyectiva de $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \prod_{\alpha\in J} A_\alpha \times \prod_{\alpha\in K} A_\alpha$;
   (b) Sea $I \neq \emptyset$ un conjunto de índices. Considere dos familias indizadas $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Demuestre si $A_\alpha \subset B_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, entonces $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in I} B_\alpha$;
   (c) Muestre que el recíproco de (b) se cumple si $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$.

4. Pruebe que si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia indizada de conjuntos no vacíos, entonces para cualquier conjunto X y cualquier familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de funciones $f_\alpha : X \to A_\alpha$, existe una única función $f : X \to \prod_{\alpha\in I} A_{\alpha\in I}$ tal que para cada $\alpha \in I$, $f_\alpha = p_\alpha \circ f$. Las funciones f_α se llaman funciones coordenadas de f, y a veces f se denota por $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ o$\prod f_\alpha$.

5. Muestre que
   (a) la cardinalidad del conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, ..., 9\}$ es igual a $2^{\aleph_0}$;
   (b) ¿Cuál es la cardinalidad de la familia de conjuntos numerables de números reales?
   (c) ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto de todos los conjuntos finitos de $\mathbb{R}$.

Dr. Hugo Villanueva Méndez