

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS  
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

---

Geometría Moderna  
Tarea 5

---

1. Muestre que
  - (a) Si  $AP$ ,  $BQ$  y  $CR$  son las alturas del triángulo  $ABC$ , el haz  $P(QR; AB)$  es armónico
  - (b) Si dos puntos cualesquiera en una circunferencia  $A$  y  $B$ , son unidos a otros cuatro puntos cualesquiera también en la circunferencia, entonces el haz cuyo centro es  $A$  es armónico si y sólo si el haz cuyo centro es  $B$  es armónico.
  - (c) Establezca y pruebe teoremas correspondientes al inciso anterior si uno de los cuatro puntos es  $A$ .
  - (d) Establezca y pruebe teoremas correspondientes al inciso anterior si uno de los cuatro puntos es  $A$  y otro es  $B$ .
2. La bisectriz del ángulo  $A$  del triángulo  $ABC$  corta al lado opuesto en  $P$ , sean  $Q$  y  $R$  los pies de las perpendiculares desde  $B$  y  $C$  sobre  $AP$ . Demuestre que los cuatro puntos  $A, P, Q, R$  son armónicos.
3. Las tangentes a una circunferencia en  $P$  y  $Q$  se intersectan en  $A$  y el diámetro  $BC$ , al prolongarlo, pasa por  $A$ . Demuestre que  $A$  y  $Q$  están separados armónicamente por los puntos en los cuales su recta es intersectada por  $PB$  y  $PC$ .
4. Si  $(AB; CD) = -1$  y  $M$  es el punto medio de  $AB$ , muestre que
  - (a)  $\frac{1}{CA \cdot CB} + \frac{1}{DA \cdot DB} = \frac{1}{MA \cdot MB}$
  - (b)  $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}$
  - (c)  $DA \cdot DB = DC \cdot DM$
5. Si  $AD$  y  $AA'$  son la altura y la mediana desde  $A$  del triángulo  $ABC$  y las paralelas a  $A'$  a  $AB$  y  $AC$  intersectan a  $AD$  en  $P$  y  $Q$ , respectivamente, muestre que  $(AD; PQ) = -1$ .
6. Tres puntos distintos están uno en cada lado de un triángulo. Sus conjugados armónicos con respecto a los vértices del triángulo, están unidos a los vértices opuestos. Muestre que las tres rectas así obtenidas son concurrentes si y sólo si los tres puntos son colineales.

---

Dr. Hugo Villanueva Méndez