UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Lógica y Conjuntos
Tarea 7

"Probamos por medio de la lógica, pero descubrimos por medio de la intuición."
- Henri Poincaré

1. Se tienen 12 monedas iguales en apariencia, pero una de ellas es falsa y tiene un peso distinto que el resto. No se sabe si pesa más o menos. El objetivo es descubrirla usando una balanza con dos platillos, la cual solo detecta si lo que se pone en uno de los platillos pesa más, igual o menos que lo depositado en el otro. Para descubrir la moneda distinta se pueden efectuar sólo tres pesadas. ¿Es posible encontrar la moneda falsa? De ser cierto, indique cómo. De no ser posible argumente por qué.
2. Indique si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas. Argumente.
   (a) Si m y n son múltiplos de 3, entonces $m - n$ es múltiplo de 3.
   (b) Si $m + n$ es múltiplo de 5, entonces m y n son múltiplos de 5.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.
3. Demuestre que si se distribuyen 40 monedas en nueve bolsas de manera que cada bolsa contenga al menos una moneda, entonces al menos dos bolsas contienen el mismo número de monedas.
4. Sea
$$m = \tfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$
el promedio de los números reales a_1, $a-2$, ..., a_n. Suponga que existe i tal que $a_i < m$. ¿Existe j tal que $a_j > m$?
5. Una cuadrícula de 4 columnas y 7 filas se llena con los números del 1 al 28, sin repetir números. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 el producto de todos los números de la primera, segunda, tercera y cuarta columna, respectivamente. Muestra que al menos uno de estos productos es múltiplo de 128.
6. Determine cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. Argumente.
   (a) $\exists! x \in \mathbb{Z} : x + 3 = -7$
   (b) $\exists! x \in \mathbb{N} : x^2 + 1 = 1$
   (c) $\forall x \in [0, \infty), \exists! y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.
   (d) $\exists x \in [0, \infty) : \exists! y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.
   (e) $\exists! x \in \mathbb{R} : \forall y \in \{-1, 1\}, y^2 = x$.
7. Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$
8. Muestre que para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$1 + 2^n \leq 3^n.$$
9. Un matemático se encuentra con un amigo al que no ha visto por mucho tiempo. Ésta fue parte de la conversación:
   - ¿Cuántos hijos tienes?
   - Tres hijas, -dice el matemático-.
   - ¿De qué edades?
   Para hacerlo interesante, el matemático responde:
   - El producto de las edades es 36 y la suma es igual al número de mi casa.
   El amigo, que también es matemático, después de pensarlo un poco le dice:
   - Hace falta un dato para deducir las edades de tus hijas.
   El matemático responde:
   - Tienes razón, la mayor toca el piano.
   ¿Qué edades tienen las hijas?

Dr. Hugo Villanueva Méndez