UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Geometría Diferencial
Tarea 2

1. Calcule la longitud de arco de la cicloide (Problema 2, Tarea 1) correspondiente a una rotación completa del disco.
2. Muestre que una parametrización de la tractriz es la función $\alpha : [\frac{\pi}{2}, \pi) \to \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(\theta) = \left(\cos\theta + \ln\tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \operatorname{sen}\theta\right)$.
3. Sea $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t\right)$. Calcule $\alpha'(t)$, $|\alpha'(t)|$ y reparametrice la curva por longitud de arco.
4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con derivada continua. Parametrice la gráfica de la función f en el intervalo $[a, b]$ y muestre que a longitud de la gráfica está dada por la fórmula

$$long(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

5. Sea $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\operatorname{sen} t)$ con $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $b < 0$, una curva parametrizada.
   (a) Muestre que cuando $t \to \infty$, $\alpha(t)$ se aproxima al origen $(0, 0)$, girando alrededor de él (a esta curva se le conoce como *espiral logarítmica*).
   (b) Muestre que $\alpha'(t) \to (0, 0)$ cuando $t \to \infty$ y que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(u)|du$$

   es finito; es decir, α tiene longitud de arco finita en $[t_0, \infty)$.
6. Determine si las siguientes bases son positivas:
   (a) $((1, 3), (4, 2))$ en $\mathbb{R}^2$,
   (b) $((1, 3, 5), (2, 3, 7), (4, 8, 3))$ en $\mathbb{R}^3$.
7. Considere la curva parametrizada (hélice)

$$\alpha(s) = \left(a\cos\left(\tfrac{s}{c}\right), a\operatorname{sen}\left(\tfrac{s}{c}\right), d\tfrac{s}{c}\right),$$

   con $s \in \mathbb{R}$, donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
   (a) Muestre que las rectas que contienen a $n(s)$ y pasan por $\alpha(s)$ intersectan al eje z en un ángulo constante igual a $\frac{\pi}{2}$.
   (b) Muestre que las rectas tangentes a α hacen un ángulo constante con el eje z.
8. Muestre que la torsión τ de α está dada por

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s) \bigwedge(\alpha''(s)\cdot\alpha'''(s))}{|k(s)|^2}.$$

Dr. Hugo Villanueva Méndez