UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
CENTRO DE ESTUDIOS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS BÁSICAS Y APLICADAS

Cálculo I
Tarea 10

---

1. Demuestre que
   (a) $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} f(x)$;
   (b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x)$;
   (c) $\lim_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$;
   (d) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = \infty$.
2. Halle los siguientes límites cuando existan.
   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1}$;
   (b) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$.
   (c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$;
   (d) $\lim_{x\to\infty} x\sin^2(x)$;
3. (a) Si $|f(x)| \leq |x|$ para todo x, demuestre que f es continua en 0.
   (b) Dé un ejemplo de una función de este tipo que no sea continua en ningún $a \neq 0$.
   (c) Suponga que g es continua en 0, que $g(0) = 0$ y que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x. Demuestre que f es continua en 0.
4. (a) Halle una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ pero continua en todos los demás puntos.
   (b) Halle una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ y en 0 pero continua en todos los demás puntos.
5. (a) Suponga que $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) > 0$. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $0 \leq x-a < \delta \Rightarrow f(x) > 0$. Análogamente, si $f(a) < 0$, demuestre que $\exists\, \delta > 0$ tal que $0 \leq x-a < \delta \Rightarrow f(x) < 0$.
   (b) Demuestre una versión análoga al inciso anterior cuando $\lim_{x\to b^-} = f(b)$.

Dr. Hugo Villanueva Méndez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
CENTRO DE ESTUDIOS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS BÁSICAS Y APLICADAS

Cálculo I
Tarea 10

---

1. Demuestre que
   (a) $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} f(x)$;
   (b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x)$;
   (c) $\lim_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$;
   (d) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = \infty$.
2. Halle los siguientes límites cuando existan.
   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1}$;
   (b) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$.
   (c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$;
   (d) $\lim_{x\to\infty} x\sin^2(x)$;
3. (a) Si $|f(x)| \leq |x|$ para todo x, demuestre que f es continua en 0.
   (b) Dé un ejemplo de una función de este tipo que no sea continua en ningún $a \neq 0$.
   (c) Suponga que g es continua en 0, que $g(0) = 0$ y que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x. Demuestre que f es continua en 0.
4. (a) Halle una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ pero continua en todos los demás puntos.
   (b) Halle una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ y en 0 pero continua en todos los demás puntos.
5. (a) Suponga que $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) > 0$. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $0 \leq x-a < \delta \Rightarrow f(x) > 0$. Análogamente, si $f(a) < 0$, demuestre que $\exists\, \delta > 0$ tal que $0 \leq x-a < \delta \Rightarrow f(x) < 0$.
   (b) Demuestre una versión análoga al inciso anterior cuando $\lim_{x\to b^-} = f(b)$.