UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

“Apuntes del curso de Variable Compleja”

Agosto - Diciembre 2019

Dr. Orlando Díaz Hernández

Índice general

0.1. Números complejos . . . .

0.1.1. Operaciones fundamentales con números complejos . . . .

0.1.2. Valor absoluto o módulo . . . .

0.1.3. Representación gráfica de números complejos . . . .

0.1.4. Forma polar de números complejos. . . . .

0.1.5. El teorema de De Moivre. . . . .

0.1.6. Raíces de números complejos. . . . .

0.1.7. Formula de Euler . . . .

0.1.8. Los raíces n-éstimas de la unidad . . . .

0.1.9. Producto escalar y vectorial . . . .

0.2. Funciones, límites y continuidad . . . .

0.2.1. Funciones unívocas y multivocas. . . . .

0.2.2. Funciones inversas . . . .

0.2.3. Transformaciones . . . .

0.2.4. Funciones elementales . . . .

0.2.5. Límites . . . .
0.2.6. Teoremas sobre límites . . . .
0.2.7. Continuidad . . . .
0.2.8. Teoremas sobre continuidad . . . .
0.3. Sucesiones . . . .
0.3.1. Límite de una sucesión . . . .
0.4. Teoremas sobre límites de sucesiones . . . .
0.4.1. Diferenciación compleja y las ecuaciones de Cauchy - Riemann . . . . .
0.4.2. Funciones Analíticas . . . .
0.4.3. Ecuaciones de cauchy - Rieman . . . .
0.4.4. Convergencia absoluta . . . .
0.4.5. convergencia uniforme de sucesiones y series . . . .
0.4.6. Serie de potencias . . . .
0.5. Teorema de Laurent . . . .
0.6. Residuos . . . .
0.7. Cálculo de Residuos . . . .
0.8. Transformada de Laplace . . . .
0.9. Serie de Fourier. . . . .
0.10. Ejemplos varios . . . .
0.11. Bibliografía . . . .

Objetivo:

Al finalizar el curso el estudiante conocerá y manejará las principales técnicas matemáticas de la teoría de variable compleja, las series y las transformadas integrales definidas de funciones reales. En particular podrá realizar las operaciones aritméticas elementales y realizar calculo de integrales en trayectorias cerradas.

Propósito:

Este es el primer curso que proporciona una introducción a las herramientas matemáticas que utiliza la física en la solución de problemas tanto de la física teórica o aplicada. Por ello, debe hacerse énfasis en la resolución de problemas por parte del estudiante con objeto de capacitarlo y desarrolle su experiencia para enfrentar y manejar matemáticas más avanzadas y comprender las ideas de manera más precisa sobre el significado físico de las ecuaciones que resultan en la física-matemática.

0.1. Números complejos

No existe nḿero real x que satisfaga la ecuación polinómica $x^2 + 1 = 0$. Para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario introducir los números complejos .
Consideramos a un número complejo como una expresión de la forma $a + ib$, a y b son números reales, i se denomina unidad imaginaria, con la propiedad de que $i^2 = -1$. Si $z = a + ib$, a se llama la parte real de z y b la parte imaginaria de z y los denotaremos por por Rez e Imz, respectivamente.

El símbolo z, que representa cualquier elemento del conjunto de número complejos se le llama una variable compleja. También podemos representarlo por (a, b).
Dos números complejos $a + ib$ y $c + id$ son iguales si y solamente si $a = c$ y $b = d$.

Podemos considerar a los números reales como el subconjuntos del conjunto de los números complejos con $b = d$.

El conjugado complejo de un número complejo $a + ib$ es $a - ib$

El conjugado de un número z se denota frecuentemente por $\overline{z}$.

0.1.1. Operaciones fundamentales con números complejos

Podemos proceder, en muchos casos como el álgebra de números reales y sustituyendo i^2 por -1 cuando aparezca.

1.-Adición : $(a + ib) + (c + id)$= $a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d)$

2.- Sustracción :$(a + ib) - (c + id) = a + ib - c - id$=$(a - c) + (b - d)i$

3.- multiplicación :$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd$=$(ac - bd) + i(ad + bc)$

4.- División: $\frac{a+ib}{c+id}$= $\frac{a+ib}{c+id}$ $\frac{c-id}{c-id}$= $\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

0.1.2. Valor absoluto o módulo

El valor absoluto o módulo de un número complejo $a + ib$ se define como $(a + ib) = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$

Si $z_1, z_2, ..., z_n$ son números complejos, las siguientes propiedades son válidas:

1.-$|z_1z_2| = |z_1|\ |z_2|$, $|z_1, z_2....z_n| = |z_1|\ |z_2|$ .... $|zn|$

2.- $|\frac{z_1}{z_2}| = |\frac{z_1}{z_2}|$ si $z_2 \neq 0$

3.- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1|\ |z_2| + ...+ |z_n|$

4.- $|z_1 + z_2| \geq |z_1|$ - $|z_2|$ ó $|z_1 - z_2| \geq |z_1|$ - $|z_2|$

0.1.3. Representación gráfica de números complejos

Si elegimos ejes reales sobre dos rectas perpendiculares $X'OX$ Y $Y'OY$ (los ejes x y y respectivamente) podemos situar cualquier punto del plano determinado por estas rectas mediante la pareja ordenada de números reales, (x, y) o coordenadas cartesianas del punto .

Un número $x + iy$ se puede considerar como una pareja ordenada de números reales, podemos representar estos números por puntos en un plano xy, llamado el plano complejo o diagrama de Argand, por ejemplo, el número representado por P se puede leer como (3, 4) ó $3, +4i$. Así a cada número complejo corresponde uno y solamente un punto en el plano y recíprocamente a cada punto en el plano corresponde uno y solamente un número complejo.

A menudo mencionamos al númeroscomplejo z como al punto z y algunas veces nos referimos a los ejes x y y como a los ejes real e imaginario, respectivamente, y al plano complejo como al plano z. La distancia entre dos puntos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ en el plano complejo está dada por $|z_1 - z_2| = [(x_1 + x_2)^2 +$ $(\frac{1}{1} - y_2)]^2$ $\frac{1}{2}$

0.1.4. Forma polar de números complejos.

Si P es un punto en el plano complejo correspondiente al nḿuero complejo (x, y) o $x + iy$ entonces:

$x = rcos\Theta$, $y = rsen\Theta$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ se le llama el módulo o valor absoluto de $z = xiy$ denotado por $|z|$ y Θ es llamado amplitud o argumento de $z = x + iy$ y es el ángulo que forma la recta OP con el eje positivo x.

Podemos dedicar que $z = x + iy$ $=r(cos\Theta + sen\Theta)$ llamada la forma polar de número complejo, y r y Θ se llaman coordenadas polares. Algunas veces es conveniente escribir la abreviatura $cis\Theta$ por $cos\Theta + isen\Theta$.

Para cualquier número complejo $z \neq 0$ corresponde solamente a un valor Θ en $0 \leq \Theta < 2\pi$

0.1.5. El teorema de De Moivre.

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(cos\theta + isen\theta,)$ y $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$
entonces:
$z_1z_2 = r_1r_2\{cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)\}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ \{cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\}$

Una generalización correspondiente conduce a:

$z_1z_2....z_n = r_1r_2....r_n\{cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2.....\theta_n)\}$

y en el caso $z_1 = z_2...... = z_n = z$ lo anterior queda como $z^n = \{r(cos\theta + isen\theta)\}^n$ $=r^n(cosn\theta + isen\theta)$ que frecuentemente se le llama el teorema de De Moivre.

0.1.6. Raíces de números complejos.

Un número ω es llamado una raíz n-ésima de un nḿuero complejo z si $w^n = z$ y escribimos $w = z^{\frac{1}{n}}$.
Del teorema de De Moivre, podemos demostrar que si n es un entero positivo

$z^{\frac{1}{n}} = \{r(cos\theta + isen\theta)\}^{\frac{1}{n}}\ (\frac{\theta+2k\pi}{n}) + sen(\frac{\theta+2k\pi}{n})\ k = 0, 1, 2, ...n - 1$
de lo cual se deduce que hay n valores diferentes para $z^{\frac{1}{n}}$, esto es n diferentes raíces n- ésimas de z si $z \neq 0$

0.1.7. Formula de Euler

Suponiendo que el desarrollo de la serie infinita $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$ del cálculo elemental se aplica cuando $x = i\theta$, podemos expresar $e^i\theta = cos\theta + isen\theta$, $e = 2,71828......$ y es llamada la fórmula de Euler.
En general definimos $e^z = e^x + c'y = e^x e^i y = e^x(cosy + iseny)$ si $y = 0$ se reduce ae^x.
Veremos posteriormente que el teorema de De Moivre se reduce esencialmente a $e^{(i\theta)n} = e^{in\theta}$

0.1.8. Los raíces n-éstimas de la unidad

Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, n es un entero positivo se llaman las raíces n-ésimas de la unidad y están dadas por:
$z = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n} = e^{2k\pi i\ /n}$ $k = 0, 1, 2, ...n - 1,$

haciendo $w = cos\frac{2\pi}{n} + isen\frac{2\pi}{n} = e\frac{2\pi i}{n}$

las n raíces son $1, w, w^2, ..., w^n - 1$.
Geométricamente representan los n vértices de un polígono regular de n lados inscritos en una circunferencia que tiene radio unidad con centro en el origen. Esta circunferencia tiene como ecuación $|z| = 1$, se le conoce como circunferencia unidad.

0.1.9. Producto escalar y vectorial

Sean $z, = x_1 + iy, yz_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos (vectores).El producto escalor(también llamado el producto interno) de z_1y z_2 esta definido por
$z_1 \cdot z_2$= $|z_1|\ |z_2|\ cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = Re\{z_1z_2\}$ donde θ es el ángulo entre z_1 y z_2 y que está entre 0 y π.

El producto vectorial de z_1 y z_2 está definiendo por $z_1xz_2 = |z_1|\ |z_2|\ sen\theta$= $x_1y_2 - y_1x_2 =$

$Im\{\overline{z}_1 z_2\}$

Ahora si z_1 y z_2 son distintos de cero, entonces

1) Una condición necesaria y suficiente para que z_1 y z_2 sean perpendiculares es que $z_1 \cdot z_2 = 0$

2) Una condición necesaria y suficiente para que z_1 y z_2 sean paralelos es que $z_1 \times z_2 = 0$

3) La magnitud de la proyección de z, sobre z_2 es $\frac{|z_1 \cdot z_2|}{|z_2|}$

4) El área de un paralelogramo de lados z_1 y z_2 es $(z_1 \times z_2)$

0.2. Funciones, límites y continuidad

Un símbolo, en este caso z, el cual representa a cualquier elemento de un conjunto de números complejos es llamado una variable compleja z, si le corresponde uno o más valores de una variable compleja w, decimos que w es una función de z y escribimos $w = f(z)$ o $w = g(z)$, etc. La variable z comúnmente es llamado la variable independiente, mientras que w es llamada la variable dependiente. El valor de una función en $z = a$ se escribe $f(a)$.
Luego si $f(z) = z^2$, entonces $f(zi) = (zi)^2 = -4$

0.2.1. Funciones unívocas y multivocas.

Si a cada valor de z corresponde sólo un valor de w, decimos que w es una función unívoca de z o que $f(z)$ es unívoca. Si más de un valor de w corresponde a cada de z, decimos que w es una función multíivoca o multiforme de z.

Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones unívocas; cada miembro de esta colección será llamado una rama de la función. Se acostumbra considerar a un miembro particular como una rama principal de la función multívoca y el valor de la función correspondiente a esta rama como el valor principal.

Ejemplo (teorema de De Moivre):

Si $w = z^2$, entonces para cada valor de z existe sólo un valor de w. Por esto $w = f(z) = z^2$ es una función unvoca de z.

Si $w = z^{\frac{1}{2}}$ entonces para cada valor de z existen dos valores de w. De donde $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ es una función multivaluada de z, para este caso bivaluada.

Cuando hablemos de cualquier función, supondremos, al menos que se diga lo contrario, que es una función unívoca.

0.2.2. Funciones inversas

Si $w = f(z)$, entonces podemos considerar a z como una función de w, simb´licamente $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La función f^{-1} se llama la función inversa de f. Entonces $w = f(z)$ y $w = f^{-1}(z)$ son funciones inversas, una de la otra.

0.2.3. Transformaciones

Si $w = u + iv$ (u y v son reales) es una función unívoca de $z = x + iy$ $(x, y$, reales), podemos escribir $u + iv = f(x + iy)$. Igualando partes real e imaginaria esto es equivalente a:
$a = a(x, y), v = v(x, y)$.

Entonces al punto (x, y) es el plano z, tal como p. Le corresponde el punto(u, v) en el plano w digamos p'. Al conjunto de ecuaciones $u = u(x, y)$, a lo equivalente, $w = f(z)$ es llamada una transformación . Decimos que el punto P se aplica o transforma en el punto p' por medio de la transformación y llamadas P' la imagen de P.

Ejemplo .- si $w = z^2$, entonces $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ y la transformación es $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. La imagen de un punto$(1, 2)$ en el plano z es el punto $(-3, 4)$ en el plano w.

0.2.4. Funciones elementales

Las funciones polinominales son las definidas por:
$w = a_0 z^n + a_1 z^{n_1} +.... + a_{n_1} z + a_n = P(z)$ donde $a_0 \neq 0$ $a_1, ..., a_n$ son constantes complejas y n es un entero positivo llamado el grado del polinomio $p(z)$.

Las funciones algebraicas racionales son las definidas, por $w\frac{p(z)}{Q(z)}$ donde $p(z)$ y $Q(z)$ son polinomios. Las funciones trigonométricas o circulares $senz, cosz$, etc., los podemos definir en términos de las funciones exponenciales como sigue :
$senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z_i}$, $cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
$senz = \frac{1}{cosz} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$, etc.
$sen^2 z + cos^2 z = 1$, $sen(-z) = senz$, $cos(-z) = cosz$ etc.

0.2.5. Límites

Sea $f(z)$ definida y unívoca en una vecindad de $z = z_0$ con la posible excepción de z_0 (o sea, en una velocidad reducida de z_0).
Decimos que el número ℓ es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 y escribimos $\lim f(z) = \ell$ Si para cualquier número positivo

$$z \to z_0$$

ε (posiblemente muy pequeño) podemos encontrar algún número positivo δ (generalmente depende de ε).

En tal caso decimos que $f(z)$ tiende a ℓ cuando z tiende a z_0 y lo escribimos como $f(z) \to \ell$ cuando $z \to z_0$. El límite debe ser independiente de la manera como z se aproxima a z_0.
Geométricamente, si z_o es un punto en el plano complejo, entonces $\lim(z) = \ell$ si la diferencia en valor absoluto entre $f(z)$ y ℓ puede $z \to z_0$
hacerse tan pequeño como queramos escogiendo los puntos z suficientemente próximas a z_0 (exigiendo $z = z_0$).

0.2.6. Teoremas sobre límites

Si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

y

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = B$$

Entonces

$$1. - \lim_{z \to z_0} \{(z) + g(z)\} = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = A + B$$

$$2. - \text{lím}\{f(z) - g(z)\} = \{\lim_{z \to z_0} f(z)\}\{\lim_{z \to z_0} g(z)\} = A - B$$

$$3. - \lim_{z \to z_0} \{f(z)g(z)\} = \lim_{z \to z_0} f(z)\}\{\lim_{z \to z_0} g(z)\} = AB$$

$$4. - \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \frac{A}{B} siB \neq 0$$

0.2.7. Continuidad

Sea $f(z)$ definida y unívoca en una vecindad de $z = z_0$ así como en $z = z_0$. La función $f(z)$ se llama continua en $z = z_0$, si $\lim_{z \to z_0}(z) = f(z_0)$.
Observemos que para que $f(z)$ sea continua en $z = z_0$ debe cumplir
1.- $\text{lím} f(z) = \ell$ debe existir.
2.-$f(z_0)$ debe existir, o sea $f(z)$ está definida en z_0.
3.- $\ell = f(z_0)$
Los puntos en el plano z donde $f(z)$ nos es continua serán llamadas discontinuas en esos puntos.

0.2.8. Teoremas sobre continuidad

Teorema 1.- Si $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $z = z_0$ entonces $f(z) + g(z)g(z) - g(z), f(z)g(z)$ y $\frac{f(z)}{g(z})$ son continuas también, la última solamente si $g(z_0) \neq 0$.
Teorema 2.- si $w = f(z)$ es continua en $z = z_0$ y $z = g(\xi)$ es continua en $\xi = \xi_0$ y si $\xi = f(z_0)$, entonces la función $w = g[f(z)]$, llamada función compuesta es continua en $z = z_0$, es decir, la compuesta de funciones continuas es continua.
Teorema 3.- si $f(z)$ es continua en una región, entonces las partes real e imaginaria de $f(z)$ son también continuas en la región.

0.3. Sucesiones

Una función de una variable entera positiva, denotada por $f(n)$ o u_n, donde $n = 1, 2, 3, ...$ se llama una sucesión. Entonces una sucesión es un conjunto de números $a_1, a_2, a_3....$ arreglada en un orden definido y formadas de acuerdo con una regla definida. Cada número en la sucesión es llamado un término y $\{a_n\}$ es llamado el término n-ésimo. La sucesión $a_1, a_2, a_3.....$ se denota también brevemente por $\{a_n\}$.La sucesión se llama finita o infinita de acuerdo a si existe un número finito de términos o no en la sucesión .
Ejemplo.-

El conjunto de números $1 + i$,$\frac{(1+i)^2}{2!}$, $\frac{(1+i)^3}{3!}$ es una sucesión infinita. El término n-ésimo está dado por $U_n = \frac{(1+i(^n}{n!} = 1, 2, ...$

0.3.1. Límite de una sucesión

Un número ℓ se llama el límite de una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, ...$ si para cualquier número positivo ε podemos encontrar un número positivo N que depende de ε tal que $|u_n - \ell| < \xi$ para todo $n > N$. En tal caso escribimos

$$\lim_{n\to\infty} = a_n \ell$$

.

Si el límite de una sucesión existe, la sucesión existe, la sucesión se llama convergente, de lo contrario divergente. Una sucesión puede converger a un sólo límite, es decir, si el límite existe es único.

0.4. Teoremas sobre límites de sucesiones

Si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = Ay \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

entonces

$$1. - \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} a_n b_n = A \pm B$$

$$2. - \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B} siB \neq 0$$

0.4.1. Diferenciación compleja y las ecuaciones de Cauchy - Riemann

Si el límite existe independientemente de la manera como $\Delta_z \to 0$, En tal caso decimos que $f(z)$ es diferenciable en z. Algunas veces usamos h en vez de Δz. Ahora bien, aunque la diferenciabilidad implica continuidad, lo recíproco no es cierto.

0.4.2. Funciones Analíticas

Si la derivada $f'(z)$ existe en todo punto z de una región R, entonces diremos que $f(z)$ es analítica en R y nos referimos a ella como una función análítica en R. Los términos regular y holoforma son usados algunas veces como sinónimos de analítica.
Una función $f(z)$ es llamada analítica en un punto z_0, si existe una vecindad $|z - z_0| < \delta$ tal que en cada punto de ella $f'(z)$ exista.

0.4.3. Ecuaciones de cauchy - Rieman

Una condición necesaria para que $w = f(z) = u(x, y) + ir(x, y)$ sea analítica en una región R es que, en $R; u, v$ satisfagan las ecuaciones de Cauchy - Riemann.
$\frac{au}{ax} = \frac{av}{ay}, \frac{au}{ay} = \frac{av}{ax}$

Utilizando la definición del producto vectorial de dos números complejos definimos el rotor de una función compleja por medio de:
$RotA = \nabla \times A = \frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta p}{\delta y}$

4.- Laplaciano
El operador laplaciano esta definido como el producto escalar de ∇ consigo mismo, es decir,
$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}$

donde $Sn(z)$, es llamada la n-ésima suma parcial, es la suma de los primeros n términos de la sucesión $\{U_n(z)\}$.
La sucesión $s_1(z), s_2(z), ..., s_n(z)$ se simboliza por

$$u_1(z) + u_2(z) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

llamada serie infinita. Si

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z),$$

la serie se llama convergente y $s(z)$ es su suma; de otra manera la serie llamada divergente. Algunas veces escribiremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$$

como $\sum U_n(z)$ o $\sum U_n$ por brevedad.

Si una serie converge para todos los valores de z (punto) en una región R, R se le llama la región de convergencia de la serie.

0.4.4. Convergencia absoluta

Una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$$

se llama absolutamente convergente si la serie de los valores absolutos, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n(z)|,$$

converge. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

converge, pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n(z)|$$

no converge, decimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$$

es condicionalmente convergente.

0.4.5. convergencia uniforme de sucesiones y series

En la definición de límite de una sucesión de funciones se recalcó que el número N depende en general de ε y el valor particular de z. Puede esperarse, sin embargo, que podamos encontrar un número N tal que $|U_n(z) - U(z)| < \varepsilon$ para todo $n > N$ y para todo z en una región R (es decir, N dependa solamente de ε y no del valor particular del punto z en la región). En tal caso decimos que $U_n(z)$ converge uniformemente, o es uniformemente convergente $U(z)$ para todo z en R.

Análogamente si la sucesión de las sumas parciales $\{S_n(z)\}$ converge uniformemente a $s(z)$ en una región, decimos que la serie infinita converge uniformemente, o es uniformemente convergente en la región.

0.4.6. Serie de potencias

Una serie de la forma:

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} an(z-a)^n$$

se llama una serie de potencias en $z - a$. Algunas veces será indicado brevemente por $\sum an(z-a)^2$.

Claramente la serie de potencias (z) converge para $z = a$ y este puede ser el único punto para el que converge. En general, sin embargo, la serie converge para otros puntos.
-Algunos teoremas importantes

Teorema 1.- si una secesión tiene un límite, el límite es único.
Teorema 2.-

0.5. Teorema de Laurent

Sean C_1 y C_2 círculos concéntricos de radios R_1 y R_2 respectivamente y centro en a.

Suponga que $f(z)$ en unívoca y analítica sobre C_1 y C_2 en la región sombreada R entre C_1 y C_2. Sea $a+h$ un punto en R. Entonces tenemos:

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + ... + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + ...$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

n=0,1,2,...

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (z-a)^{n-1} f(z) dz$$

n=1,2,3,...

C_1 y C_2 se recorren en la dirección positiva respecto a sus interiores. Los coeficientes de a_n y a_{-n} se llama una serie o desarrollo de Laurent.

0.6. Residuos

Sea $f(z)$ unívoca y analítica dentro y sobre el círculo C excepto en su centro, el punto $z=a$. Entonces, $f(z)$ tiene una serie de Laurent en torno a $z=a$ dada por:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)n = a_0 + a_1(z-a) + ... + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + ...$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

En el caso especial n=-1, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

ya que a_{-1} es el único coeficiente se llama el residuo de f(z) en $z = a$.

0.7. Cálculo de Residuos

Para obtener el residuo de una función $f(z)$ en $z = a$, debemos encontrar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en torno a $z = a$. Sin embargo, en el caso donde $z = a$ es un polo de orden k existe una fórmula simple para a_{-1} dada por:

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z)$$

-El terorema del residuo.

Sea $f(z)$ unívoca y analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C excepto en las singularidades a, b, c, ... interiores a C con residuos dados por $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, ...$

Entonces el teorema del residuo dice:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1})$$

es decir, la integral de $f(z)$ alrededor de C es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de $f(z)$ en las singularidades encerradas por C.

0.8. Transformada de Laplace

* Definición de la transformada de Laplace.

Sea $F(t)$ una función de t definida para $t > 0$. La transformada de Laplace de $F(t)$, denotada por $\mathscr{L}\{F(t)\}$, se define como

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

donde s es real.

Se dice que la transformada de Laplace de F(t) existe cuando la integral anterior converge para algún valor de s; de otra manera, se dice que no existe.

-Notación.

Cuando se indique con Mayúscula una función de t, como $F(t), G(t), Y(t)$, etc.. La transformada de Laplace de dicha función se denotará por la correspondiente letra minúscula, es decir, $f(s), g(s), y(s), etc.$. En otros casos pueden usar el símbolo ( ) para denotar la transformada de Laplace. Así, p. ej. la transformada de Laplace de $u(t)$ es ũ(s).

-Transformadas de Laplace de algunas funciones elementales.

Algunas propiedades importantes de la transformada de Laplace. Para los teoremas siguientes se supondrá, a menos que se establezca lo contrario, en todas las funciones, que sus transformadas de Laplace existen.

1.- Propiedad de la linealidad. Si C_1 y C_2 son constantes y $F_1(t)$ y $F_2(t)$ son funciones cuyas transformadas de Laplace son, respectivamente, $f_1(s)$ y $f_2(s)$, entonces:

$$\mathscr{L}\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = C_1\mathscr{L}\{F_1(t)\} + C_2\mathscr{L}\{F_2(t)\} = C_1f_1(s) + C_2f_2(s).$$

Este resultado puede extenderse a más de dos funciones.

2.- Propiedad de traslación.

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$$

3.- Propiedad del cambio de escala.

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a}f(\frac{s}{a})$$

4.- Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0).$$

0.9. Serie de Fourier.

Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida por =

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{-T/2} < t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < T/2 \end{cases}$$

La transición de funciones que tienen periodo 2π a funciones que tienen cualquier periodo T es simple, porque estas pueden ser afectadas por un cambio de escala.

Supongamos que$f(t)$ tiene periodo T. Entonces podemos introducir una nueva variable x tal que $f(t)$, como una función de x, que tiene periodo 2π sea:

a) $t = \frac{t}{2\pi}x$
b) $x = \frac{2\pi}{T}t$

$x = \pm\pi$ corresponde para $t = \pm t/2$ Esto significa que f, como función de x tiene periodo 2π . Por lo tanto si f tiene una serie de Fourier, esta serie debe ser de la forma:

(a) $f(t) = f(\frac{T}{2\pi}x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos nx + b_n sin nx)$

cuyos coeficientes podemos obtenerla de la fórmula de Euler:

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi}x)dx \; a_n \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} (\frac{T}{2\pi}x) cos\, nx\, dx.$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi}x) sin\, nx\, dx.$

podríamos usar estas fórmulas directamente, pero el cambio at simplifica los cálculos. ya que:

$x = \frac{2\pi}{t}t \Longrightarrow dx = \frac{2\pi}{T}dt,$

Y el intervalo de integración sobre el eje x corresponde al intervalo:

$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

Por consiguiente, podemos ver que las coeficientes de Fourier de una función períodica $f(t)$ de periodo T están dados por las fórmulas de Euler:

a) $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$

b) $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) cos \frac{2n\pi t}{T} dt \; n = 1, 2, ...$

c) $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) sin \frac{2n\pi t}{T} dt$

Así, la serie de Fourier (2) con x expresada en términos de t se convierte en:

$f(t) a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n sin \frac{2n\pi}{T} t).$

Esto implica de nuestra función:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{-T/2} < t < 0 \\ 1 & 0 \le t < T/2 \end{cases}$$

tenemos entonces:

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt = \frac{2}{T}\Big[\int_{T/2} -dt + \int_0^{T/2} dt\Big] = \frac{2}{T}\Big] - t\mid_{T/2}^{0} + t\mid_0^{T/2}$

$= \frac{2}{T}(-T/2) + \frac{2}{T}(T/2) = 0$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) cos\frac{2n\pi t}{T} dt.$

$= \frac{2}{T}\Big[\int_{-T/2}^{0}(-1) cos\frac{2n\pi t}{T} dt + \int_0^{T/2} cos\frac{2n\pi t}{T} dt\Big]$

$= \frac{2}{T}\Big[- \frac{1}{\frac{2n\pi}{T}} sen(\frac{2n\pi t}{T})|_{\frac{-T}{2}}^{0} + \frac{1}{\frac{2n\pi}{T}} sen(\frac{2n\pi t}{T})|_0^{T/2}$

$= \frac{2}{T}\Big[- \Big[- \frac{T}{2n\pi} sen(\frac{2n\pi(-T/2)}{T}) + \frac{T}{2n\pi} sen(\frac{2n\pi(T/2)}{T})\Big]$

Ahora bien, por ser seno una función impar$=-sen(x) = sen(-x)$, entonces:

$= \frac{2}{T} sen(\frac{2n\pi(t/2)}{T}+) + \frac{T}{2n\pi} sen\Big] = 0$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) sen(\frac{2n\pi t}{T})dt$

$= \frac{2}{T}\left[\frac{1}{2n\pi} cos(\frac{2n\pi}{T} \mid_{-T/2}^{0} - \frac{1}{\frac{2n\pi}{T}} cos(\frac{2n\pi t}{T}) \mid_{0}^{T/2} \right]$

$= \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2n\pi}\left[(1) - cos(\frac{2n\pi(-T/2)}{T}) - \frac{T}{2n\pi}\left[cos(\frac{2n\pi(T/2)}{T}) - 1\right]\right]$

$= \frac{1}{n\pi}\left[1 - cos(n\pi) - cos(n\pi) - +1\right]$

Ahora, por ser coseno una función par: $cos(-x) = cos(x)$, entonces:

$= \frac{1}{n\pi}\left[1 - cos(n\pi) - cos(n\pi) - +1\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1 - cos(n\pi)\right] n \neq 0$

$\Longrightarrow b_n = 0.$

Cuando n es par, $b_n = \frac{4}{n\pi}$ y cuando $n = 1, 3, 5, 7, ...$, tenemos finalmente:

$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[Sin(\frac{2\pi}{T}t) + \frac{1}{3} sen(\frac{6\pi}{T}t) + \frac{1}{5} sen(\frac{10\pi}{T}t) + \frac{1}{7} sen(\frac{14\pi}{T}t) + ...\right.$

o bien, podemos expresarlo como:

$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} sen((2n-1)\frac{2\pi}{T}t)$

0.10. Ejemplos varios

En esta sección se ejemplifican algunos ejercicios propuestos en clase.

1.- Resolver si la siguiente ecuación es armónica, y si es analítica, si no es el caso encontrar el valor de u o v para que lo sea.

$a = e^{-x}(x\,Sen\,y - y\,Cos\,y)$

criterio para saber si es armónica

$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

encontramos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}(Sen\,y) + (xSen\,y - \,yCos\,y)(-e^{-x})$

$= e^{-x}(Sen\,y) + (yCos\,y - xSen\,y)e^{-x}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(Sen\,y + y\,Cos\,y - xSen\,y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(-Sen\,y) + (Sen\,y + \,y\,Cos\,y - x\,Seny)(-e^{-x})$

$e^{-x}(-Sen\,y) + (x\,Sen\,y - Sen\,y - \,y\,Cos\,y)e^{-x}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(xSen\,y - y\,Cosy - 2\,Sen\,y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x\,Cos\,y - [y(-seny) + (cos\,y)(1)])$

$\frac{\partial\, u}{\partial\, y} = e^{-x}(x\,Cos\,y + y\,Sen\,y - Cos\,y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(-x\,Sen\,y + Sen\,y + y\,Cos\,y + Sen\,y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(-x\,Sen\,y + 2\,Seny + y\,Cos\,y)$

comprobando el criterio

$\frac{\partial^2 u}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$= e^{-x}(x\,Sen\,y - y\,Cos\,y - 2\,Sen\,y) + e^{-x}(-x\,Sen\,y + 2\,Sen\,y + y\,Cos\,y)$

$= e^{-x}(x\,Sen\,y - yCos\,y - 2\,Sen\,y - x\ Sen\,y + y\,Cos\,y)$

$= e^{-x}(0) = 0$

(b) Encontrar v, tal que f(z) = u + i v es analítica

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}(Sen\,y +\ y\,Cos\,y - x\,Sen\,y) = \frac{\partial v}{\partial y}$

Calculo v integrado $\partial v/\partial y$ con respecto a y

$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-x}(Sen\,y +\ y\,Cos\,y - x\,Sen\,y)$

$V = \int e^{-x}(Sen\,y + y\,Cos\,y - x\,Sen\,y)dy$

$V = \int e^{-x}(Sen\,y +\ y\,Cos\,y - x\,Sen\,y)dy$

$V = e^{-x}[\int Sen\,y\,\partial y + \int y\,Cos\,y\,\partial y - x\int Sen\,y\,\partial y]$

$\int y\,Cos\,ydy = udv = uv - \int vdu$

$= y\,Sen\,y - \int\ Sen\,y\,\partial y$

$= y\,Seny + Cos\,y$

$v = e^{-x}(-Cos\,y + y\,Sen\,y + Cos\,y + x\,Cosy) + cte.$

$V = e^{-x}(y\,Sen\,y + x\,Cos\,y) + cte.$

$f(z) = u + iv = e^{-x}(x\,Sen\,y - y\,Cos\,y) + ie^{-x}(y\,Sen\,y + x\,Cos\,y)$

2.- Resuelva la siguiente integral:

$\oint \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}, \qquad donde \qquad |z| = 4 \qquad y \qquad z = x + iy$

$z^2 = \pi^2, \qquad es\, decir, z = \sqrt{-1\pi^2} = \pm i\pi$

$z\sqrt{-\pi^2}$ o bien $z\sqrt{i^2\pi^2}$

Aplicando la fórmula integral de cauchy:

$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz$

$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)}^{n+1} dz$

y con

$z^2 + \pi^2 = (z + i\pi)(z - i\pi)$

$= z^2 - zi\pi + zi\pi - i^2\pi^2$

$z^2 + \pi^2 = z^2 + \pi^2$

tenemos:

$\oint \frac{e^2}{(z^2+\pi^2)^2} (z - i\pi)^2$

$z_1 = -i\pi \qquad y \qquad z_2 = +i\pi$

$\oint \frac{\frac{e^z}{(z+i\pi)^2}}{(z-i\pi)^2} dz = \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$

$n + 1 = 2 \qquad y\, f(z) = \frac{e^z}{(z+i\pi)^2}$

es decir,

$n = 1 \qquad y\, f(z) = \frac{a}{v}$

esto es:

$\frac{2\pi i f^n(0)}{n!} = \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+z}} dz$

$a^2 = 2udu = 2(z + i\pi)$

$u = z + i\pi$

$du = 1$

$a = +i\pi$

$f^1(z) = \frac{(z+i\pi)^2(e^z)-(e^z)(2z+2i\pi)}{[(z+i\pi)^2]^2} = \frac{e^2(z^2 2zi\pi-\pi^2-2z-2i\pi)}{[(z+i\pi)^2]^2}$

$f^1(a)\frac{e^{i\pi}((i\pi)^1+2(i\pi)(i\pi)-\pi^2-2(i\pi)-2i\pi)}{[(z+i\pi)^2]^2}$

$f^1(a) = \frac{e^{i\pi}(-\pi^2-2\pi^2-\pi^2-2i\pi-2i\pi)}{[(2i\pi)^2]^2} = \frac{e^{i\pi}(-4\pi^2-4i\pi)}{16\pi^4}$

donde

$[(2i\pi)^2]^2$

finalmente

$(-4\pi^2)^2 = 16\pi^1$

por lo que

$f^1(a) = \frac{e^{i\pi}(-4\pi)(\pi+i)}{16\pi^4} = \frac{-e^{i\pi}(\pi+1)}{4\pi^3}$

$= 2\pi i(\frac{-e^{i\pi}[\pi+1]}{4\pi^3}) = \frac{1}{2} - e^{i\pi}(\pi + i)$

3.- Resuelva la siguiente integral:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{(x^2+a^2)}dx$, a > 0.

Solución.

Tomando la siguiente función:

$f(z) = \frac{e^iz}{z^2+a^2}$

con singularidades $z = \pm ia$ de las cuales sólo $ia \in \Omega$, donde Ω es la semicircunferencia de radio a sobre el eje real.

De esta manera:

$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f, ia) = 2\pi i \lim\limits_{z \to ia} \frac{(z-ia)ez}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\pi}{a}e^{-a}$

Por otra parte:

$\int_\gamma f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{(x^2+a^2)}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{(x^2+a^2)}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)}dz$

Así

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{(x^2+a^2)}dx = \frac{\pi}{a}e^{-a}$

4.- Evaluar

$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$ si

i) El punto $z = 0$ está en el interior y el punto $z = 1$ está en el exterior de la curva γ.

ii) El punto z = 1 está en el interior y el punto z = 0 está en el exterior de la curva γ.

iii) Los puntos z = 0 y z = 1 estn en el interior de la curva γ.

Solución:

i)

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} f(z)dz = f(0) = 1$

con

$f(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}$

ii)

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z-1)^3} f(z)dz = \frac{1}{2} f''(1) = \frac{-e}{2}$

con

$f(z) = \frac{-e^z}{z}$

iii)

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{-e^z}{z(z-1)^3}dz = Res(f, 0) + Res(f, 1)$

donde

$Res(f, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{-e^z}{(z-1)^3} = 1$

y

$Res(f, 1) = -\lim_{z\to 1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}((z-1)^3 \frac{e^{-z}}{z(z-1)^3}) = \frac{-e}{2}$

De esta manera:

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{z}}{z(1-z)^{3}}dz = 1-\frac{e}{2}$

0.11. Bibliografía

Arfken, G.B. (2012). Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide. Academic Press, 7th edition.

Boas, M.L. (2005). Mathematical Methods in the Physical Sciences, Wiley, 3rd edition.

Spiegel, M.R. (1965). Schaum's Outlines: Laplace Transforms. McGraw-Hill.

Spiegel, M.R. (1974). Schaum's Outlines: Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems. McGraw-Hill.

Carslaw, H.S. (1950). An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals. Dover Publications, 3rd Revised edition.

Lebedev, N.N., Silverman, R.R. (1972). Special Functions and Their Applications. Dover Publications, Revised edition.