

Introducción a la teoría de grupos

Grupos: Un grupo es un conjunto no vacío G junto con una operación binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$ que satisface las condiciones siguientes:

(i) La operación es asociativa, es decir,
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

para cualesquiera $a, b, c \in G$.

(ii) Existe un elemento neutro $e \in G$ que satisface
$$a \cdot e = a = e \cdot a,$$
 para todo $a \in G$.

(iii) Para cada elemento $a \in G$ existe otro elemento a' tal que
$$a \cdot a' = e = a' \cdot a.$$

Al elemento a' se le llama un inverso del elemento a .

.. A la operación binaria en un grupo se le denota mediante $(G, \cdot)$

Ejemplo: Si $G = GL(2, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices 2×2 con entradas en $\mathbb{R}$ y determinante $\neq 0$, los elementos de $GL(2, \mathbb{R})$ son las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

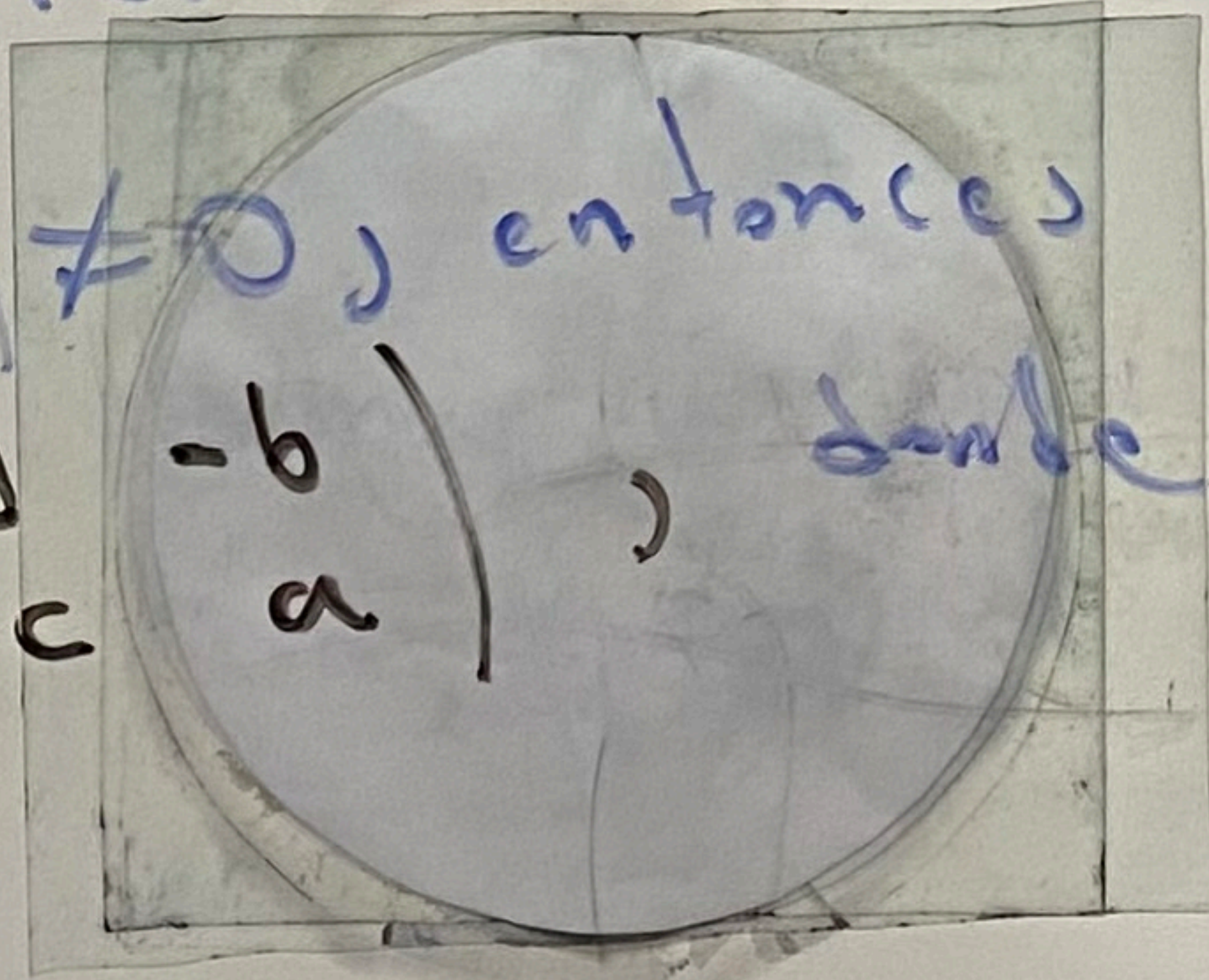
y $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Si $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, el producto es, $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$

además el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes, se tiene que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$, ya que $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$.

El neutro es la matriz identidad $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, como $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible y su inversa es, $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, donde $\Delta = \det(A) = ad - bc \neq 0$.



- Si G es un grupo con operación $\cdot$, diremos que G es conmutativo o abeliano si para cualesquiera $a, b \in G$ se tiene que

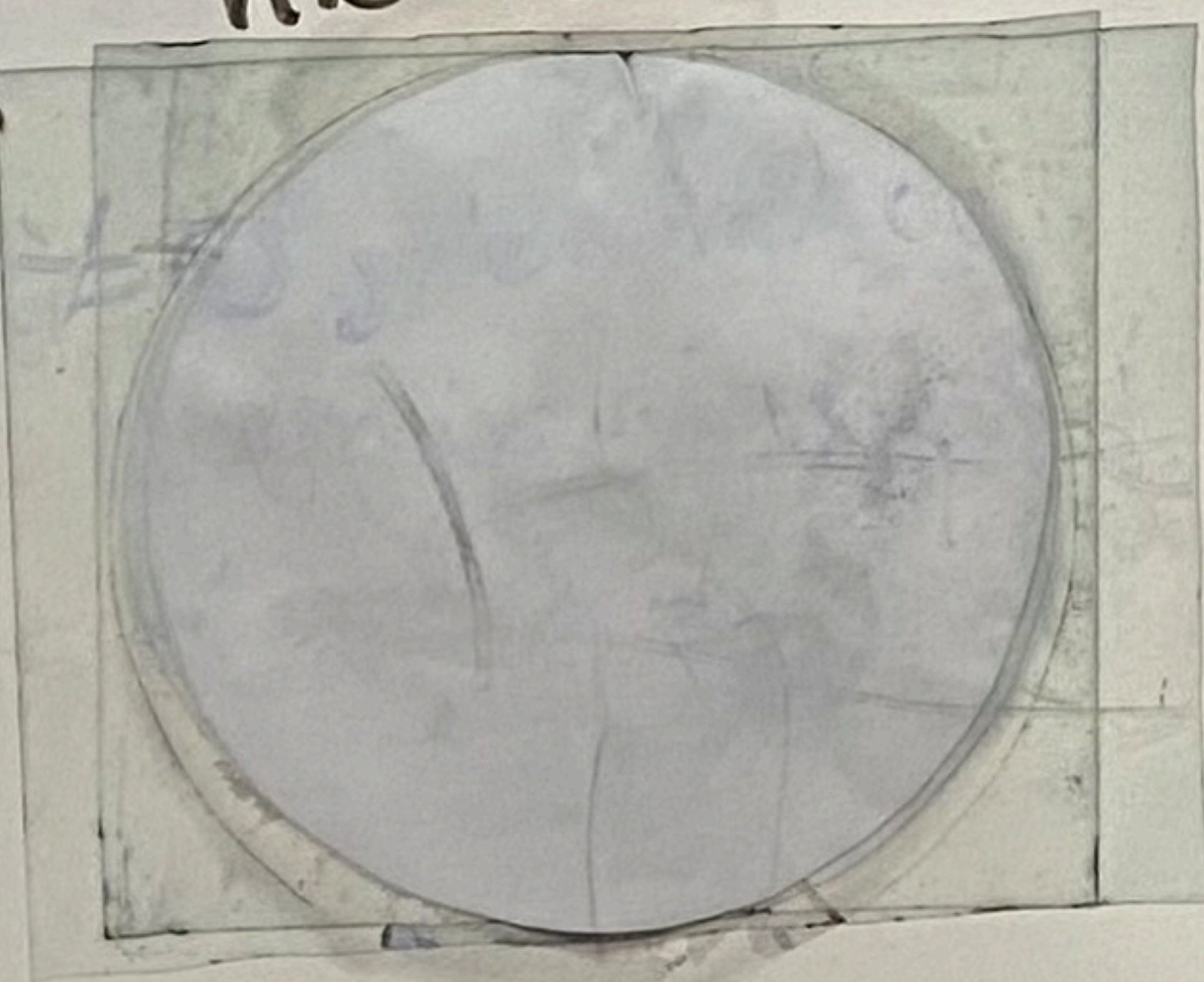
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Notemos que el grupo $GL(2, \mathbb{R})$ no es conmutativo ya que,
 por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, entonces,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4 & 3+10 \\ 0+8 & 1+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 8 & 21 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+4 \\ 6+5 & 4+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 11 & 24 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$ no es un grupo conmutativo o abeliano



$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.75 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Delta = ad - bc \neq 0$$

$$\det(F) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{\det(F)} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Definición de un vector

El vector típico es el vector de desplazamiento, el cual va dirigido de un evento a otro y tiene componentes iguales a las diferencias de coordenadas:

$\mathcal{Q}$: en el marco

$$\vec{\Delta x} \xrightarrow{\mathcal{Q}} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\vec{\Delta x} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \{\Delta x^\alpha\}$$

donde $\alpha = 0, 1, 2, 3$

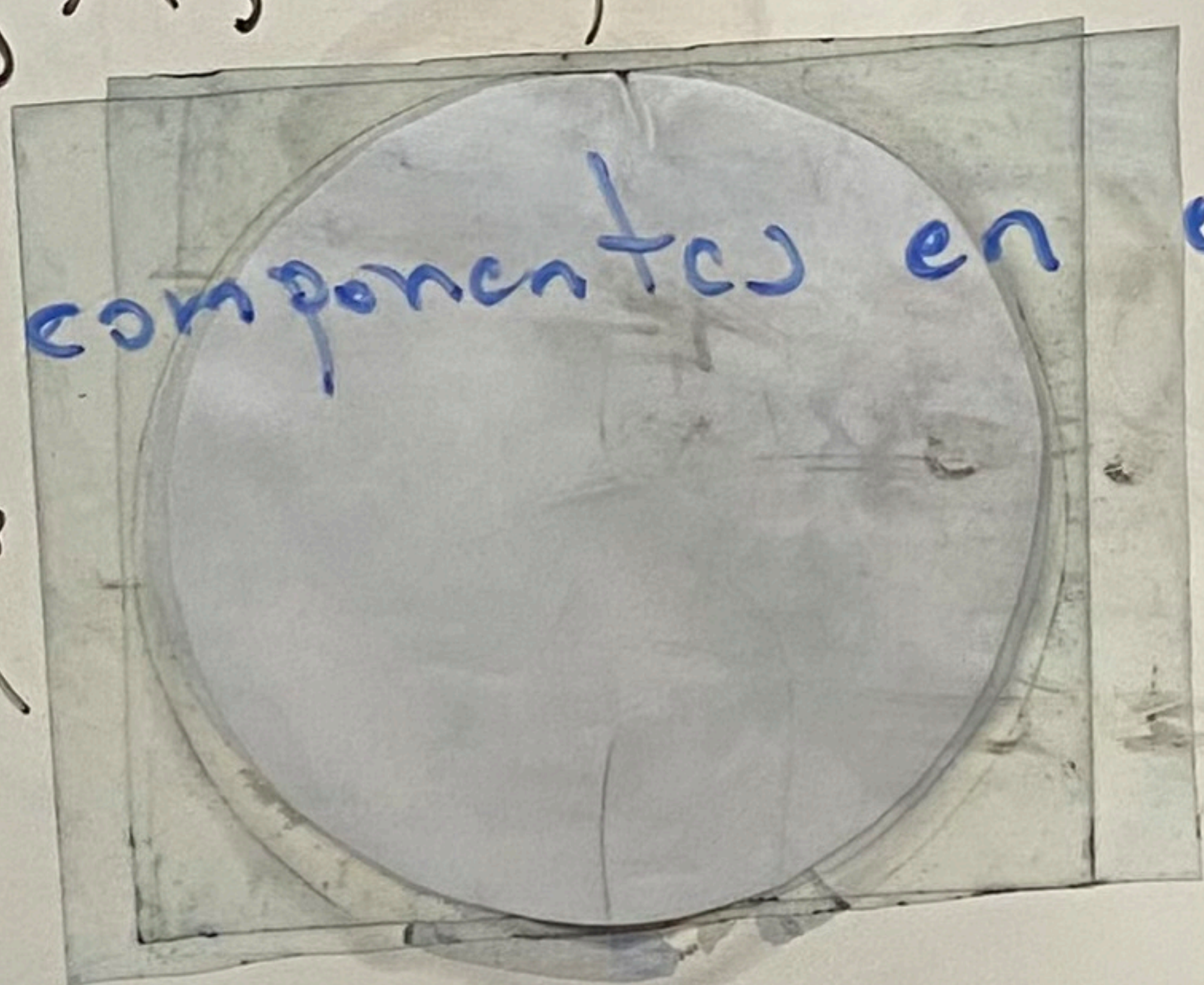
$\{\Delta x^\alpha\}$ significa $\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$

El vector general es definido por una colección de números, $\alpha = 0, 1, 2, 3$

$$\vec{A} \xrightarrow{\mathcal{Q}} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^\alpha\},$$

y por la regla de sus componentes en el marco $\bar{\mathcal{Q}}$ son

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} A^{\beta}$$



$$\vec{A} + \vec{B} \xrightarrow{\mathcal{Q}} (A^0 + B^0, A^1 + B^1, A^2 + B^2, A^3 + B^3)$$

$$M\vec{A} \xrightarrow{\mathcal{Q}} (MA^0, MA^1, MA^2, MA^3)$$

Algebra de vectores

Vectores Base

En el marco $\mathcal{Q}$ existen cuatro vectores especiales definidos por sus componentes:

$$\begin{aligned}\vec{e}_0 &\xrightarrow{\mathcal{Q}} (1, 0, 0, 0) \\ \vec{e}_1 &\xrightarrow{\mathcal{Q}} (0, 1, 0, 0) \\ \vec{e}_2 &\xrightarrow{\mathcal{Q}} (0, 0, 1, 0) \\ \vec{e}_3 &\xrightarrow{\mathcal{Q}} (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

$$\vec{A} \xrightarrow{\mathcal{Q}} (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

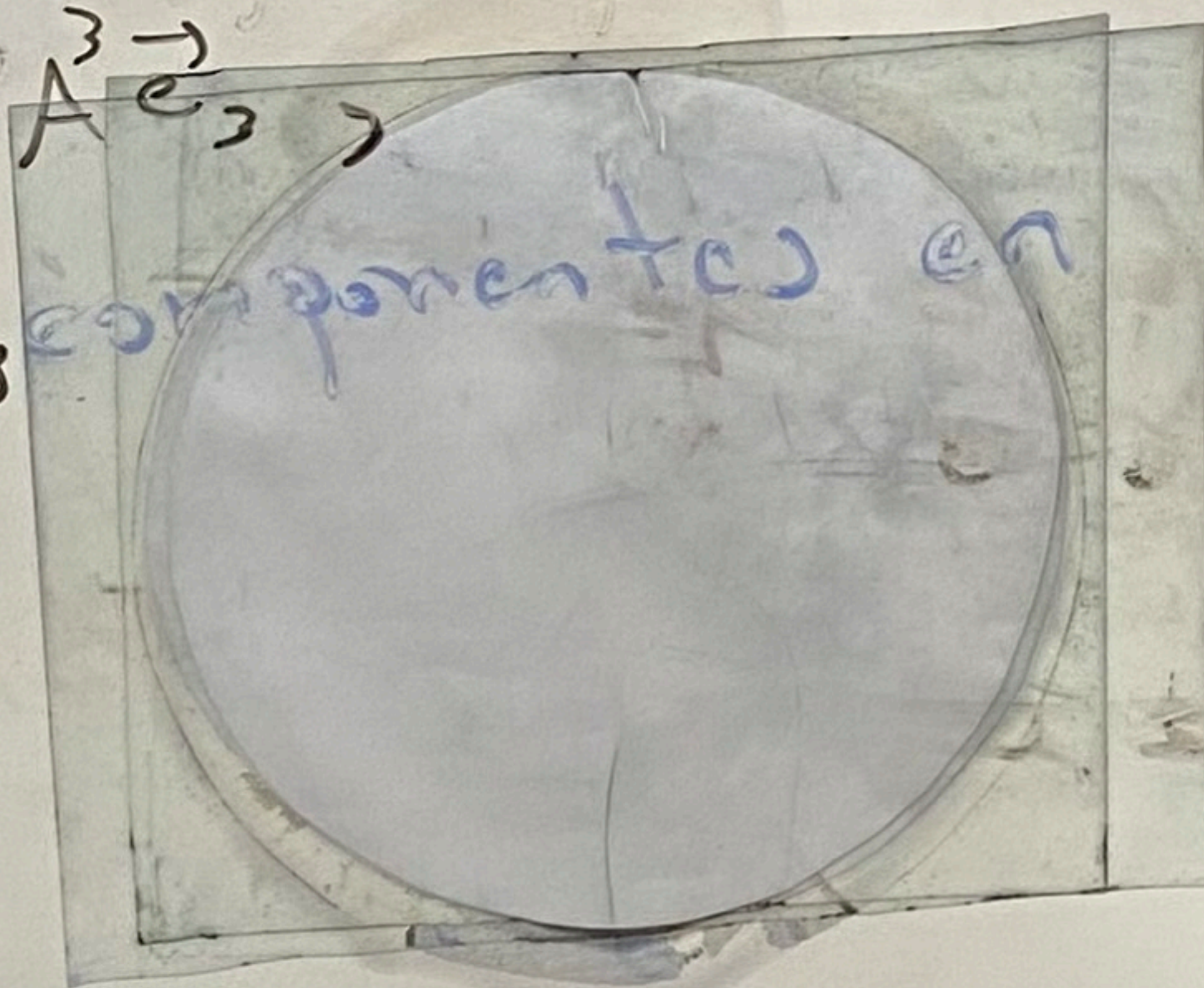
$$\vec{A} = A^0 \vec{e}_0 + A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3$$

$$\vec{A} = \tilde{A}^\alpha \vec{e}_\alpha$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3$$

Similarmente en el marco $\bar{\mathcal{Q}}$ se tienen vectores base,

$$\vec{e}_{\bar{0}} \xrightarrow{\bar{\mathcal{Q}}} (1, 0, 0, 0), \dots \text{etc.}$$



relativa a matrices

column $\rightarrow$

row $\rightarrow$

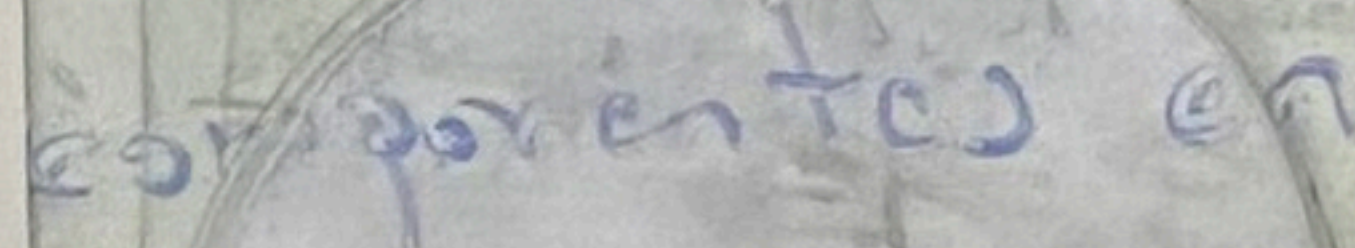
$$[\Lambda_\alpha] = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reaglor 

$$A^{\bar{0}} = \Lambda_{\alpha}^{\bar{0}} A^{\alpha} = \Lambda_0^{\bar{0}} A^0 + \Lambda_1^{\bar{0}} A^1 + \Lambda_2^{\bar{0}} A^2 + \Lambda_3^{\bar{0}} A^3$$

$$= \gamma \cdot 5 + (-\gamma v) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3$$

$$= 5\gamma$$

$$\vec{A} \rightarrow (5x, -5\sqrt{x}, 0, 2)$$


$$A^T = -SV^T$$

$$A^{\bar{z}} = 0$$

$$A^3 = 2$$

Producto escalar
Magnitud de un vector. Con analogía con el intervalo
definimos,

$$\vec{A}^2 = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$$

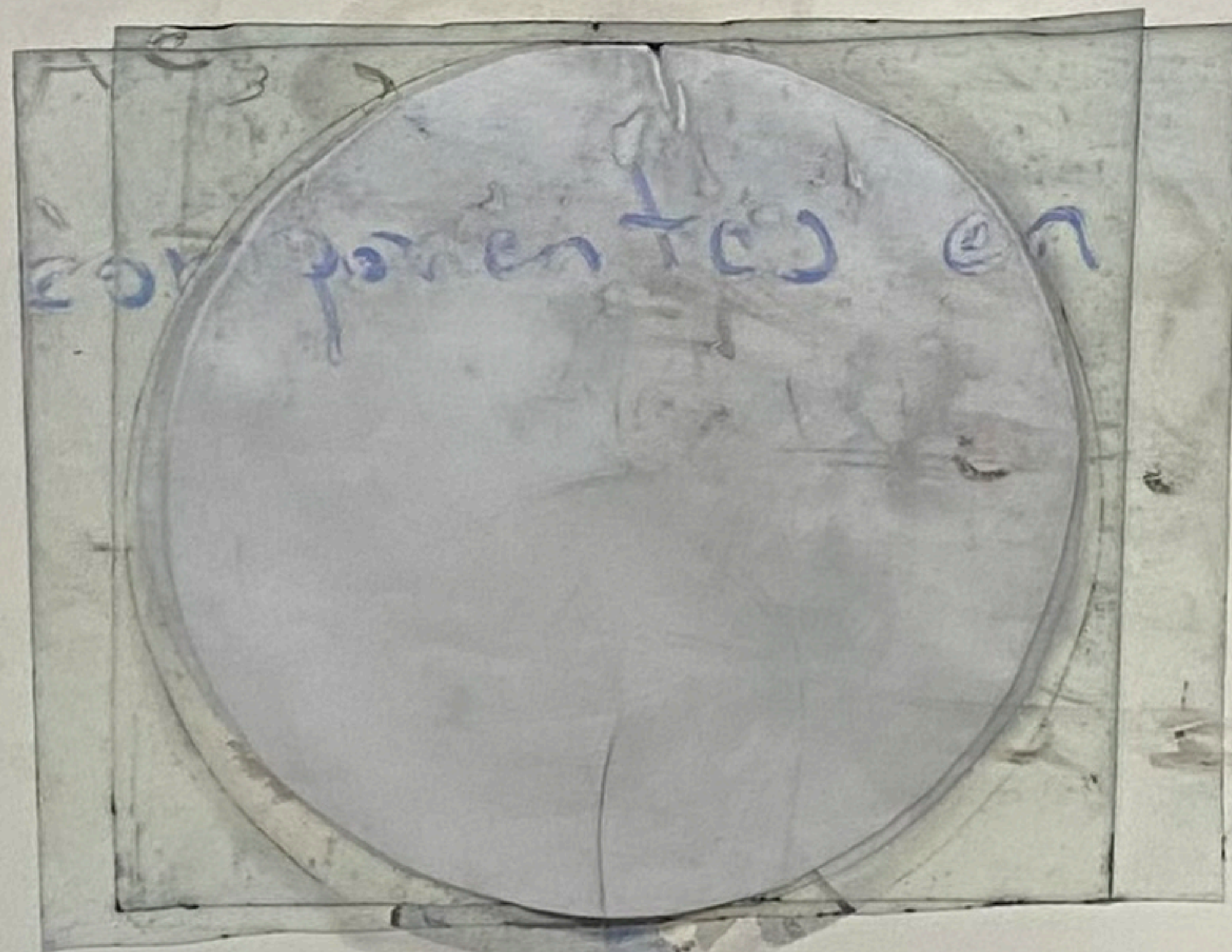
a ser la magnitud del vector $\vec{A}$.

Producto escalar de dos vectores

Definimos,

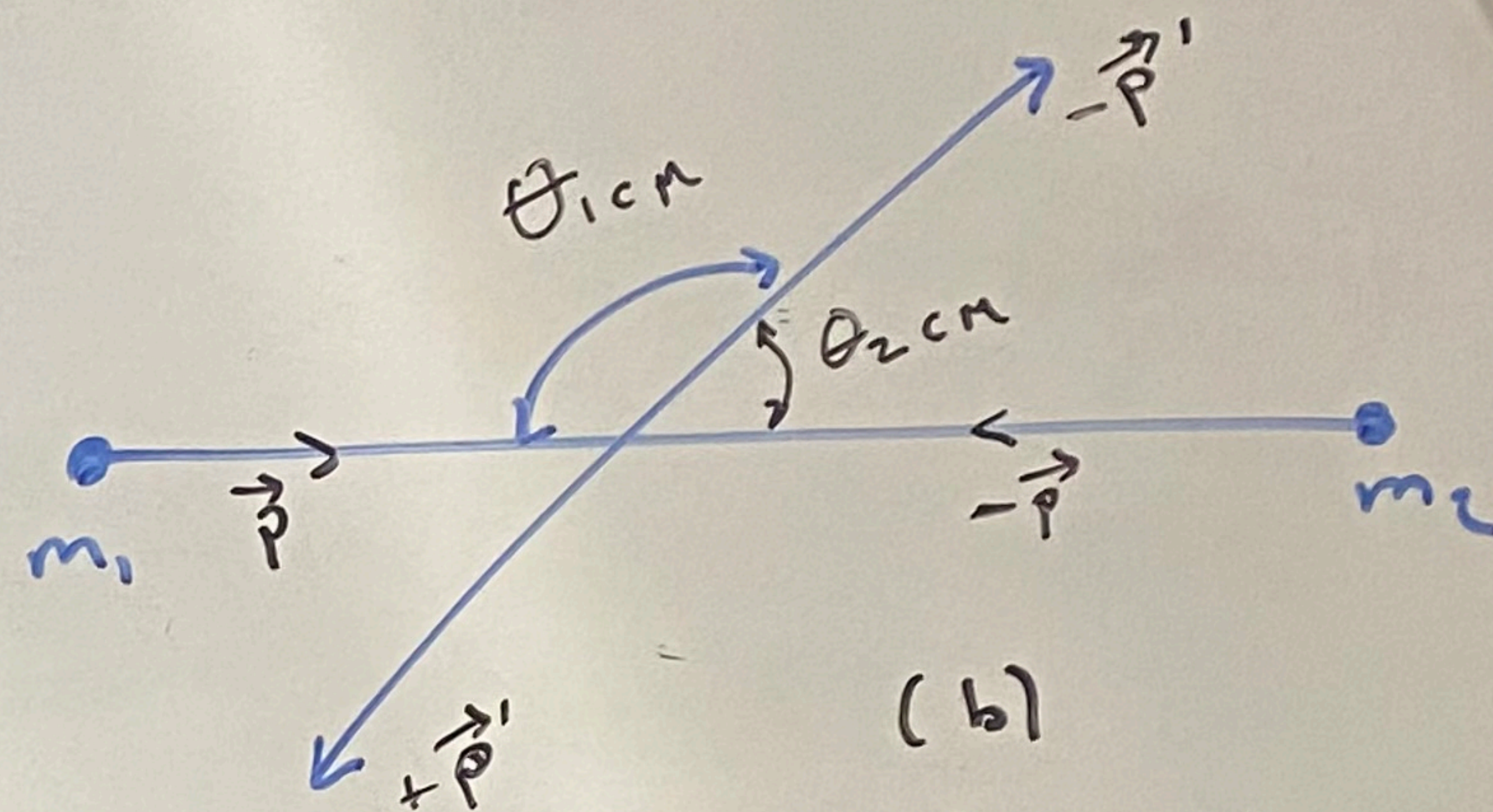
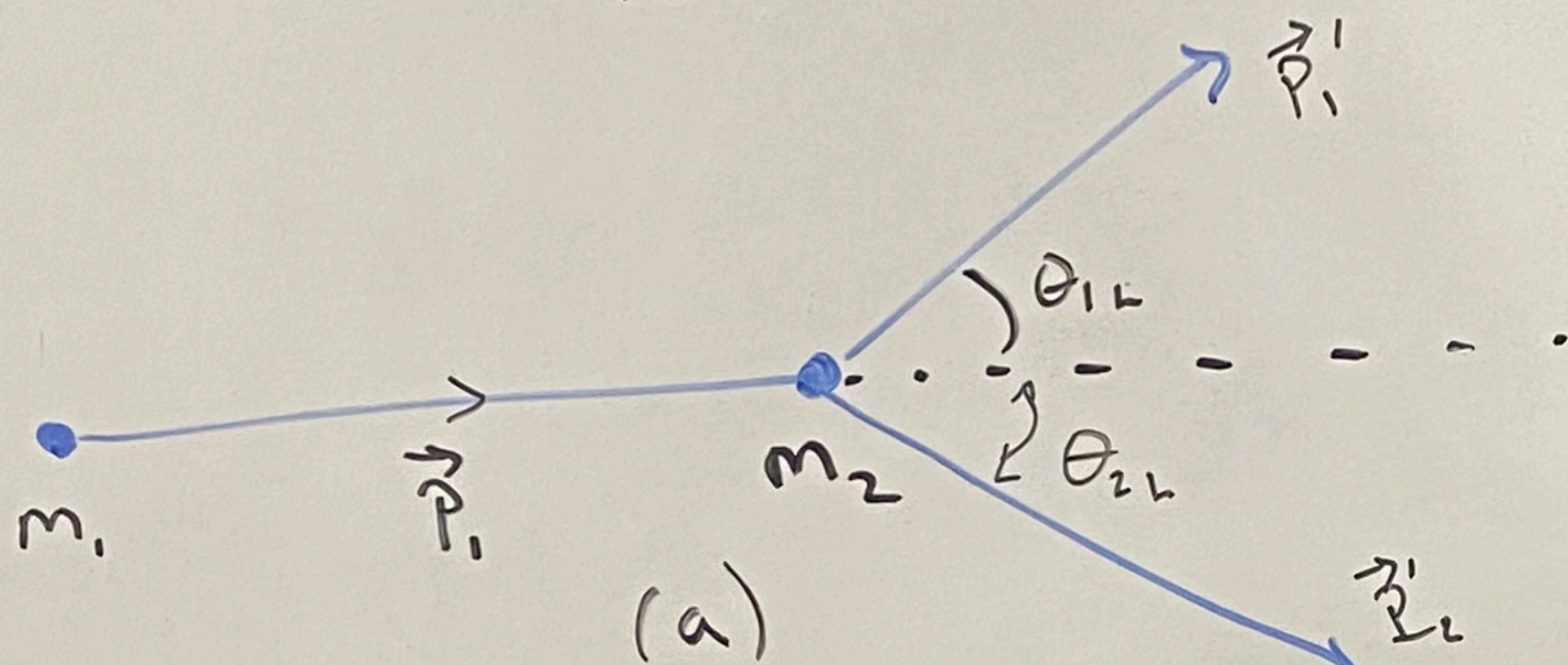
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$$

en el marco $\mathcal{Q}$.



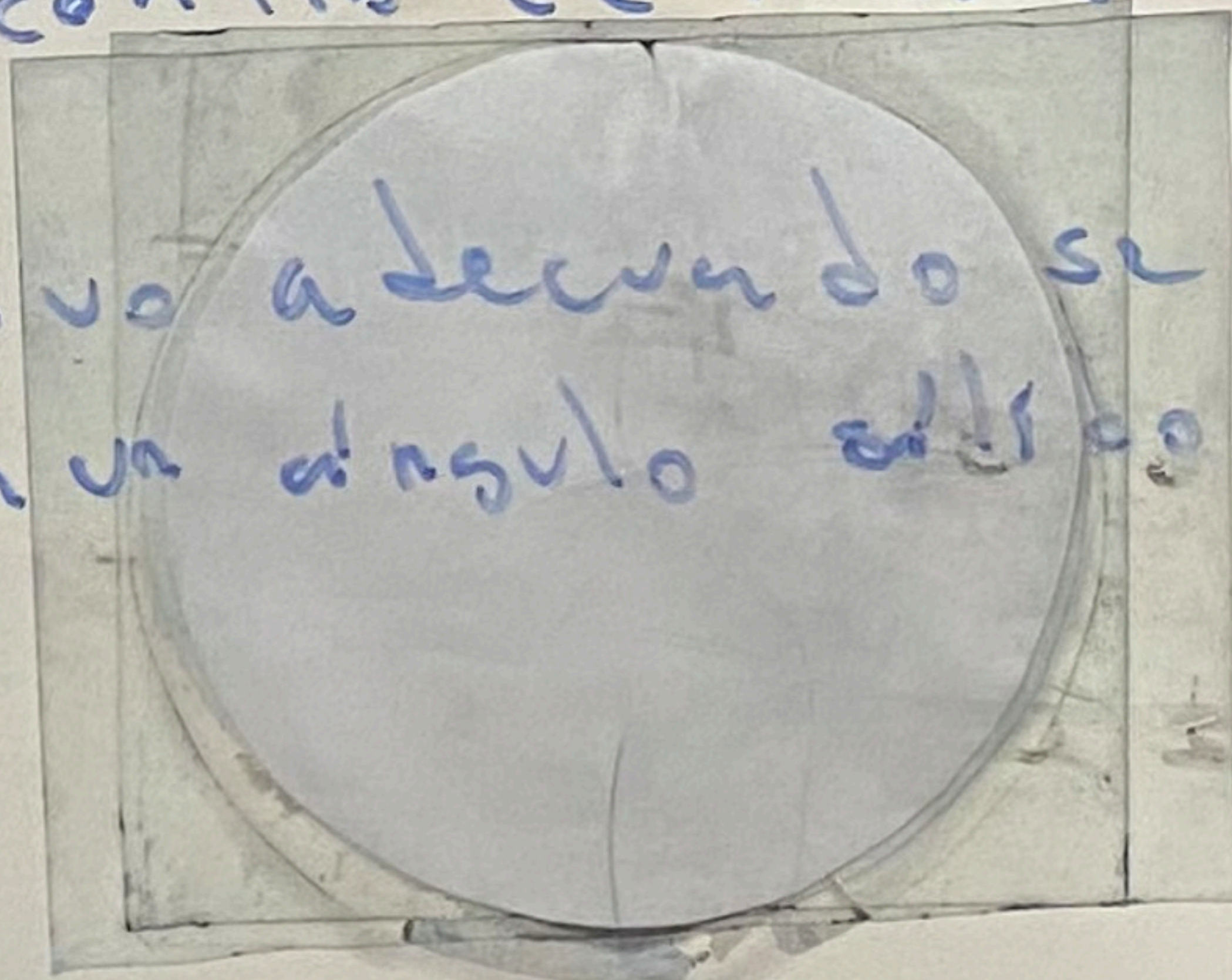
Cinemática Relativista

Umbral de reacción en colisiones en el centro de masa y en el laboratorio
 "Teoría de la dispersión en Mecánica Cuántica"



Colisión elástica entre las partículas 1 y 2, vista (a) desde el laboratorio y (b) desde el centro de masa (CM) del sistema.

Por medio de un dispositivo adecuado se pueden contar el número de partículas que son dispersadas en un ángulo sólido de tiempo.



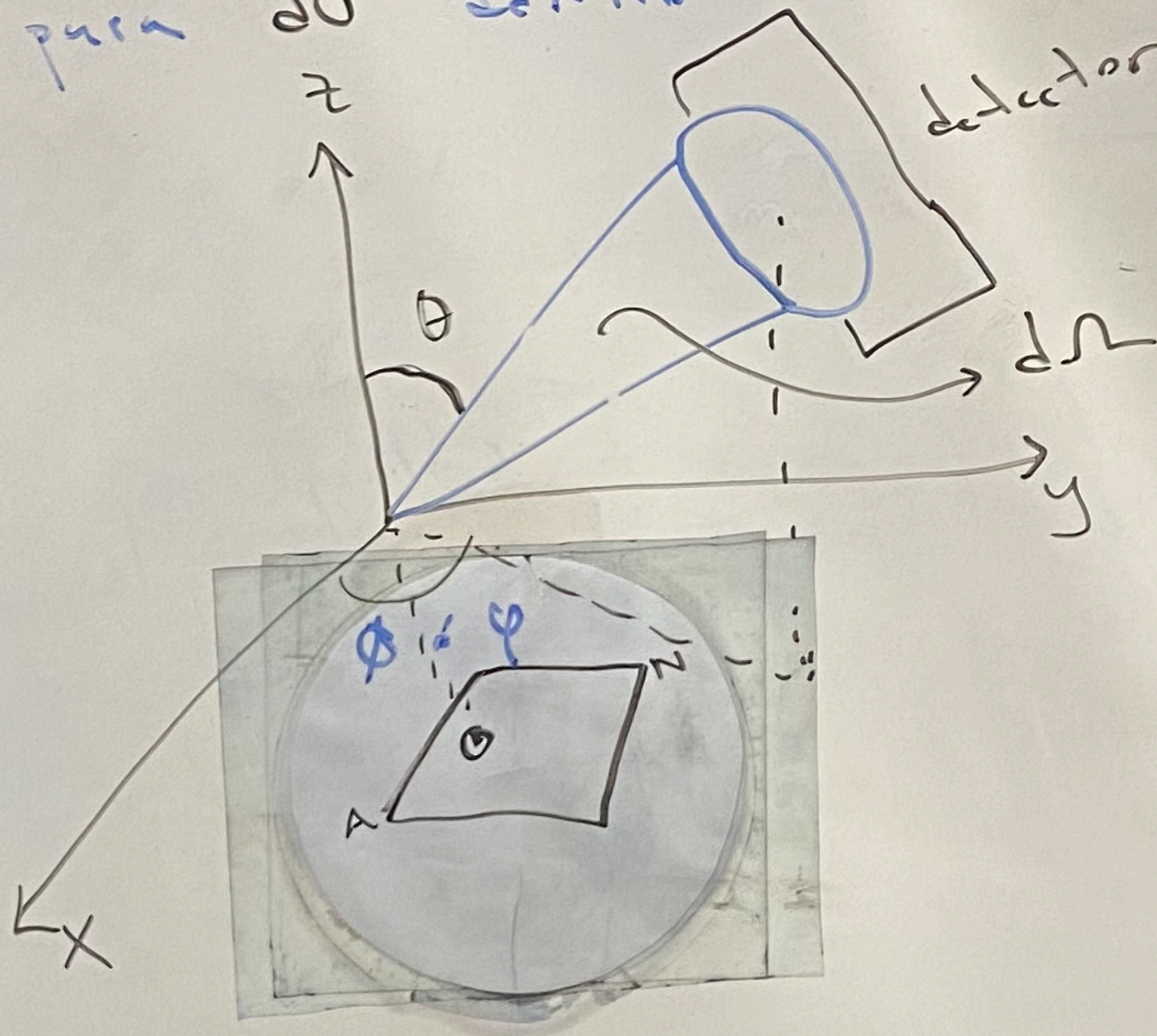
Se puede contar el número de partículas que son dispersadas en un ángulo sólido de tiempo.

$$dN = \sin\theta d\theta d\varphi, \text{ en la unidad}$$

El cociente

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{\text{Número de partículas dispersadas dentro de } d\Omega / \text{Unidad de tiempo}}{\text{Número de partículas incidentes / Unidad de área por unidad de tiempo}}$$

se llama sección diferencial de dispersión y puede ser medido experimentalmente. El objetivo de la teoría será intentar de encontrar una expresión para $d\sigma$ dentro del formalismo de la mecánica cuántica.



detector

Arreglo experimental para hacer un estudio de dispersión

$$\theta \in [0, 180^\circ]$$

$$\varphi \in [0, 360^\circ]$$

De la ecuación de continuidad,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\vec{r}, t)|^2 = 0,$$

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi(\vec{r}, t) \psi^*(\vec{r}, t)$$

" "

con

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

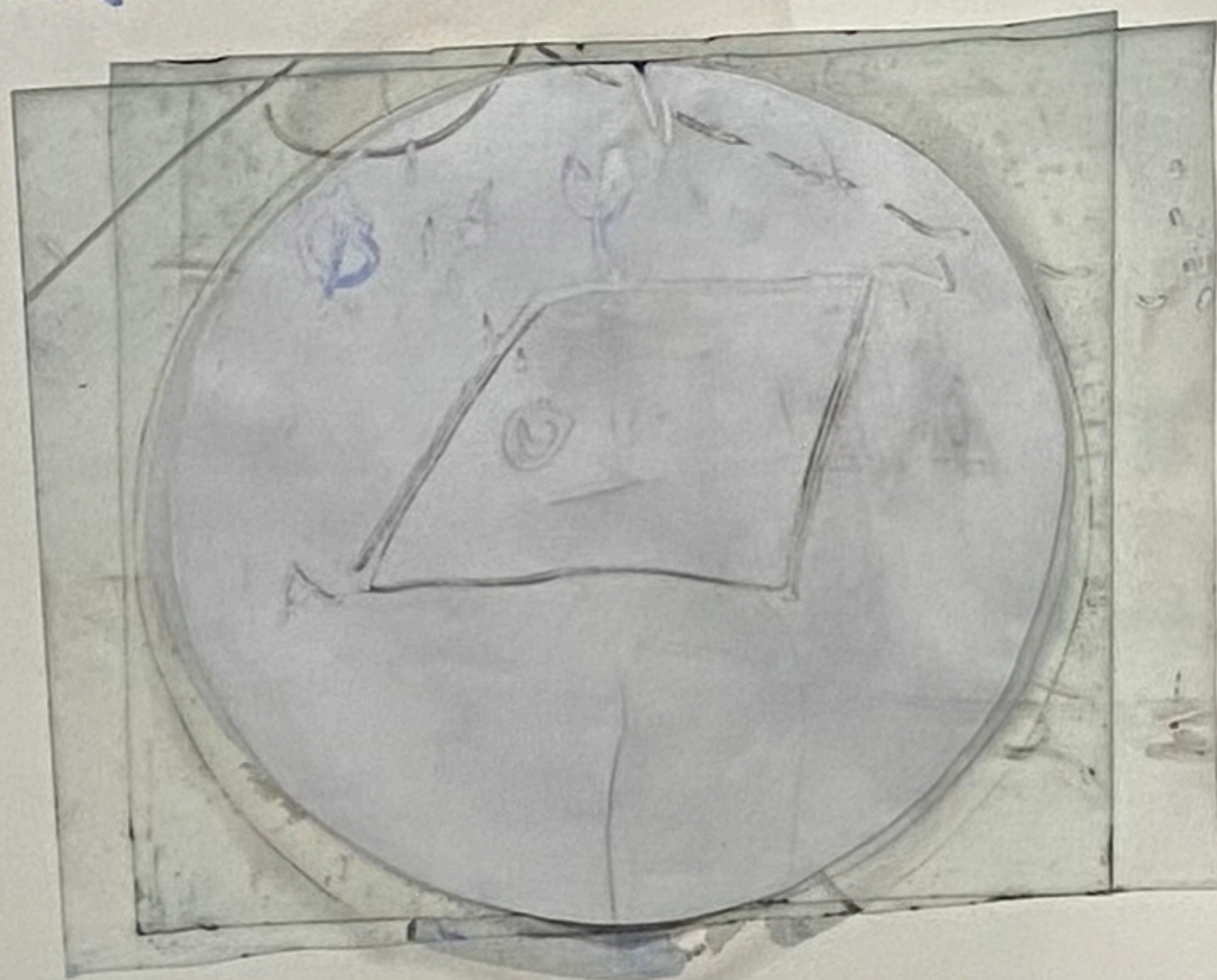
Para un proceso estacionario

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

por lo tanto $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ no depende del tiempo, y la ecuación de continuidad se reduce a $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Integrando esta ecuación sobre un volumen arbitrario, se obtiene por el Teorema de Gauss:

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau = \oint \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$



Para una onda plana se encuentran que $\vec{j}$ es un vector paralelo a la velocidad $\vec{v}$ del haz de partículas; escogiendo como volumen de integración un cilindro cuyas dos bases de área A sean normales a la dirección del haz, la ecuación anterior implica que $(\vec{j} \cdot \vec{n})_1 = (\vec{j} \cdot \vec{n})_2$. Este resultado expresa la conservación del número de partículas si a $\vec{j} \cdot \vec{n}$ lo interpretamos como el número de partículas que atraviesan la unidad de área colocada normalmente a la dirección del haz en la unidad de tiempo. De acuerdo a esta interpretación, la definición de sección diferencial dada anteriormente se puede escribir en la siguiente forma equivalente:

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{(\vec{j} \cdot \vec{n}_s) r^2 d\Omega}{(\vec{j}_i \cdot \vec{n}_i)} \rightarrow (1)$$

donde $\vec{n}$ es un vector de magnitud 1, y los índices i y s se refieren a la dirección de incidencia, y a la dirección de dispersión respectivamente. De esta manera hemos establecido la conexión con la mecánica cuántica, ya que el vector $\vec{j}$ que aparece en la ec (1) se calcula conociendo la función de onda del sistema.

Como la detección de las partículas dispersadas se efectúa a gran distancia del centro dispersor, es suficiente conocer la forma asintótica de la función de onda. Esta debe contener un término que represente al haz incidente, el cual es una onda plana; $\psi_i = e^{ikz}$ y otro término que represente el haz disperso, el cual es una onda esférica cuya amplitud en general depende de la dirección

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

$$\psi_s \sim f(\theta, \varphi) \frac{1}{r} e^{ikr}$$

$$\vec{j}_i = \frac{\hbar}{2mi} (\psi_i^* \vec{\nabla} \psi_i - \psi_i \vec{\nabla} \psi_i^*)$$

$$\vec{j}_s = \frac{\hbar}{2mi} (\psi_s^* \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^*)$$

Calculamos $\vec{j}_i$ con $\psi_i = e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta}$
 $\psi_i^* = e^{-ikz} = e^{-ikr \cos \theta}$

Coordenadas esféricas:

$$z = r \cos \theta$$

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \psi_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{\nabla} \psi_i = ik \cos \theta e^{ikr \cos \theta} \hat{e}_r + \frac{1}{r} (-ik r \sin \theta) e^{ikr \cos \theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{\nabla} \psi_i = ik \cos \theta e^{ikr \cos \theta} \hat{e}_r - ik \sin \theta e^{ikr \cos \theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{\nabla} \psi_i^* = -ik \cos \theta e^{-ikr \cos \theta} \hat{e}_r + ik \sin \theta e^{-ikr \cos \theta} \hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial r} = ik \cos \theta e^{ikr \cos \theta}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} = -ik r \sin \theta e^{ikr \cos \theta}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi} = 0$$

$$\psi_i^* \vec{\nabla} \psi_i = i\kappa \psi_i^* \psi_i (\cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta)$$

$$\psi_i \psi_i^* = \psi_i^* \psi_i = 1$$

$$\psi_i \vec{\nabla} \psi_i^* = i\kappa \psi_i \psi_i^* (-\cos\theta \hat{e}_r + \sin\theta \hat{e}_\theta)$$

$$\vec{j}_i = \frac{\hbar}{2mi} [i\kappa (\cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta) - i\kappa (-\cos\theta \hat{e}_r + \sin\theta \hat{e}_\theta)]$$

$$\vec{j}_i = \frac{\hbar}{2mi} [2i\kappa (\cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta)]$$

$$\vec{j}_i = \frac{\hbar\kappa}{m} (\cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta)$$

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x} \cos\theta \cos\varphi + \hat{y} \cos\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta \\ \hat{\theta} &= \hat{x} \cos\theta \sin\varphi + \hat{y} \cos\theta \cos\varphi - \hat{z} \sin\theta \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin\varphi + \hat{y} \cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta \hat{e}_r &= \hat{x} \cos\theta \cos\theta \cos\varphi + \hat{y} \cos\theta \cos\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \hat{e}_\theta &= -\hat{x} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi - \hat{y} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi + \hat{z} \sin\theta \sin\theta \end{aligned}$$

$$\cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta = \hat{z} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \hat{z}$$

$$\vec{j}_i = \frac{\hbar\kappa}{m} \hat{z}$$

$$\vec{j}_i = \left(\frac{\hbar k}{m}\right) \hat{z} \quad \text{y} \quad \text{sea} \quad \vec{n}_i = \hat{z} \Rightarrow (\vec{j}_i \cdot \vec{n}_i) = \left(\frac{\hbar k}{m}\right) \hat{z} \cdot \hat{z} = \left(\frac{\hbar k}{m}\right)$$

$$\vec{j}_s = \frac{\hbar}{2mi} (\psi_s^\dagger \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^\dagger) \quad \text{y} \quad \psi_s \sim f(\theta, \varphi) \frac{1}{r} e^{ikr} ; \psi_s^\dagger \sim f^*(\theta, \varphi) \frac{1}{r} e^{-ikr}$$

$$\vec{\nabla} \psi_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_s}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \psi_s \sim \left[-f(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} e^{ikr} + ik f(\theta, \varphi) \frac{1}{r} e^{ikr} \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r^2} e^{ikr} \frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} e^{ikr} \frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \psi_s^\dagger \sim \left[-f^*(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} e^{-ikr} - \frac{ik f^*(\theta, \varphi)}{r} e^{-ikr} \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r^2} e^{-ikr} \frac{\partial f^*(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} e^{-ikr} \frac{\partial f^*(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\psi_s^\dagger \vec{\nabla} \psi_s \sim \left[-\frac{f^* f}{r^3} + \frac{ik f^* f}{r^2} \right] \hat{e}_r + \frac{f^*}{r^3} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{f^*}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\psi_s \vec{\nabla} \psi_s^\dagger \sim \left[-\frac{f f^*}{r^3} - \frac{ik f f^*}{r^2} \right] \hat{e}_r + \frac{f}{r^3} \frac{\partial f^*}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{f}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{j}_s \sim \frac{\hbar}{2mi} \left[\left(-\frac{f f^*}{r^3} + \frac{ik f f^*}{r^2} \right) - \left(-\frac{f f^*}{r^3} - \frac{ik f f^*}{r^2} \right) \right] \hat{e}_r + \left(\frac{f^*}{r^3} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{f}{r^3} \frac{\partial f^*}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\theta + \left(\frac{f^*}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{f}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{j}_s \sim \frac{\hbar}{2mi} \left[\frac{2ik f f^*}{r^2} \hat{e}_r + \frac{1}{r^3} \left(f^* \frac{\partial f}{\partial \theta} - f \frac{\partial f^*}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r^3 \sin \theta} \left(f^* \frac{\partial f}{\partial \varphi} - f \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_\varphi \right]$$

$$\text{Sea} \quad \vec{n}_s = \hat{e}_r \quad \text{y} \quad \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_r = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_r = 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{j}_s \cdot \vec{n}_s) = (\vec{j}_s \cdot \hat{e}_r) \sim \frac{\hbar}{2mi} \frac{2ik f f^*}{r^2}$$

$$(\vec{j}_s \cdot \vec{n}_s) \sim \frac{\hbar k}{2m} f(\theta, \varphi) f^*(\theta, \varphi) = \frac{\hbar k}{2m} |f(\theta, \varphi)|^2$$

$$\vec{j}_i = \left(\frac{\hbar k}{m}\right) \hat{z} \quad \text{y sea } \vec{n}_i = \hat{z} \Rightarrow (\vec{j}_i \cdot \vec{n}_i) = \left(\frac{\hbar k}{m}\right) \hat{z} \cdot \hat{z} = \left(\frac{\hbar k}{m}\right) //$$

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{(\vec{j}_s \cdot \vec{n}_s) r^2 d\Omega}{(\vec{j}_i \cdot \vec{n}_i)}$$

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{\cancel{\frac{\hbar k}{m}} f(\theta, \varphi) f^*(\theta, \varphi) r^2 d\Omega}{\cancel{\frac{\hbar k}{m}}} = f(\theta, \varphi) f^*(\theta, \varphi) d\Omega$$

Sección
diferencial

$$\boxed{\frac{d\sigma(\theta, \varphi)}{d\Omega} = f(\theta, \varphi) f^*(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2}$$

$$\begin{aligned} (\vec{j}_s \cdot \vec{n}_s) &= (\vec{j}_s \cdot \hat{e}_r) \sim \frac{\hbar}{2m} \frac{2ik f f^*}{r^2} \\ (\vec{j}_s \cdot \vec{n}_s) &\sim \frac{\hbar k}{2m} f(\theta, \varphi) f^*(\theta, \varphi) = \frac{\hbar k}{2m} |f(\theta, \varphi)|^2 \end{aligned}$$

La aproximación de Born

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') d^3r'$$

$\vec{q}$: momento transferido

$$|\vec{q}| = |\vec{k}_f - \vec{k}_i| = 2k^2(1 - \cos\theta) = 4k^2 \sin^2(\theta/2)$$

$$\hbar\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$|\vec{q}| \equiv q = 2k \sin(\theta/2)$$

Así, en la aproximación de Born, $f(\theta, \varphi) = f(\vec{q})$ es justamente la transformada de Fourier del potencial con respecto a la transferencia del momento (con un factor constante).

• Elegimos potenciales con simetría esférica: $V(\vec{r}) = V(r)$

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-iqr' \cos\theta} V(r') r'^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr' \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi e^{-iqr' \cos\theta'} [-\frac{1}{\sin\theta'}] \int_0^\infty V(r') r'^2 dr' \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} (2\pi) \left(\frac{1}{qr'} \right) \int_0^\pi e^{-iqr' \cos\theta'} \sin\theta' d\theta' \int_0^\infty V(r') r'^2 dr' \\ &= -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{\sin(qr')}{q} V(r') r' dr' = f(\theta) \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$d^3r' = r'^2 d\Omega dr' = r'^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr'$$

$$\begin{aligned} e^{iqr'} - e^{-iqr'} &= \cos(qr') + i\sin(qr') - (\cos(qr') - i\sin(qr')) \\ &= 2i\sin(qr') \end{aligned}$$

La aproximación de Born

$$f(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int \frac{\sin(qr')}{q} V(r') r' dr'$$

Calculamos $f(\theta)$ para el potencial de Yukawa; $V(r) = \frac{g}{r}$

$$f(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int \frac{\sin(qr')}{q} \frac{g}{r'} r' dr' = -\frac{2\mu g}{q\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(qr') e^{-\mu r'} dr'$$

$$f(\theta) = -\frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{2i} e^{-\mu r'} dr'$$

$$f(\theta) = -\frac{2\mu}{2iq\hbar^2} \int_0^{\infty} (e^{iqr'} - e^{-iqr'}) e^{-\mu r'} dr'$$

$$\int_0^{\infty} e^{(iq-\mu)r'} dr' = \int_0^{\infty} e^{-(\mu-iq)r'} dr' = \frac{1}{\mu-iq} = \frac{1}{iq+\mu}$$

$$= \frac{iq+\mu - (\mu-iq)}{(\mu-iq)(\mu+iq)}$$

$$= \frac{2iq}{\mu^2 + q^2}$$

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{q\hbar^2 i} \frac{2iq}{(\mu^2 + q^2)} = \frac{-2\mu}{\hbar^2 (\mu^2 + q^2)}$$

$f(x)$: función gamma

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$n \geq -1$
 $a > 0$

El problema de la dispersión desde el punto de vista de la mecánica cuántica consiste entonces fundamentalmente en la siguiente; dada la ecuación de Schroedinger correspondiente al potencial $V(r)$,

$$\nabla^2 \psi + \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] \psi = 0 \rightarrow (3)$$

con $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

, donde k es la onda incidente.

Hay que encontrar una solución de esta ecuación que a grandes distancias del origen se comporte asintóticamente como,

$$\psi(\vec{r}) \sim e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{1}{r} e^{ikr} \rightarrow (4)$$

La sección diferencial de dispersión está entonces dada por la ec. (2). Un método posible para resolver la ec. (3) es el de separación de variables en coordenadas esféricas. Veamos como se analiza el problema de dispersión siguiendo este camino. Debido a la elección del eje "z" como dirección de incidencia, existe simetría de rotación alrededor del eje "z", y las soluciones de la ec. (3) serán independientes del ángulo azimutal φ .

La solución más general de la ec. (3), independiente de ϕ y obtenida por separación de variables es,

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} R_{kl}(r) P_l(\cos\theta) \rightarrow (5)$$

donde $P_l(\cos\theta) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\theta, \phi),$

y la función $R_{kl}(r)$ satisface a la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{d^2 R_{kl}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{kl}}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{kl} + k^2 R_{kl} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) R_{kl} = 0 \rightarrow (6)$$

Por sencillez en la discusión suponemos que el potencial $V(r)$ es tal que se anula para $r > a$ (potencial confinado). Entonces para $r > a$, la ec. (6) se reduce a la ecuación de las funciones de Bessel estéricas.

La solución de la ec. (6) para $r \gg a$ será una combinación lineal de las funciones $j_l(kr)$ y $n_l(kr)$; esta combinación lineal se puede escribir, sin perder generalidad, de la siguiente forma:

La ventaja de este modo de escritura es que al sustituir las fórmulas asintóticas siguientes se encuentran que,

$$j_l(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \frac{2^l l!}{(2l+1)!} s^l ; \quad j_l(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sin\left(s - \frac{l\pi}{2}\right) \quad \rightarrow (7)$$

$$n_l(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} -\frac{(2l)!}{2^l l! s^{l+1}} ; \quad n_l(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\frac{1}{s} \cos\left(s - \frac{l\pi}{2}\right) \quad \rightarrow (8)$$

$$R_{kl} \sim A_l \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \quad \rightarrow (9)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$R_{kl}(r) \sim A_l \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) = \frac{A_l}{kr} \left[\frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)}}{2i} \right]$$

$$R_{kl}(r) \sim \frac{A_l}{2ikr} \left[e^{ikr} e^{-i\frac{l\pi}{2}} e^{i\delta_l} - e^{-ikr} e^{i\frac{l\pi}{2}} e^{-i\delta_l} \right]$$

$$R_{kl}(r) \sim A_l \left[\frac{(-i)^l e^{i\delta_l} e^{ikr}}{2ikr} - \frac{(i)^l e^{-i\delta_l} e^{-ikr}}{2ikr} \right] \rightarrow (9)$$

$$e^{i\frac{l\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^l = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^l = (i)^l$$

$$e^{-i\frac{l\pi}{2}} = (-i)^l$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación 5, $\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} R_{kl}(r) P_l(\cos \theta)$,

$$\psi(\vec{r}) \sim \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l (-i)^l e^{i\delta_l} P_l(\cos \theta) - \frac{e^{-ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l (i)^l e^{-i\delta_l} P_l(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned} z &= r \cos \theta \\ \rho &= kr \end{aligned} \rightarrow (10)$$

Usando la fórmula,

$$e^{i\rho \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(\rho) P_l(\cos \theta) \rightarrow (11)$$

$\frac{1}{\rho} \sin(\rho - \frac{l\pi}{2})$, reescribimos

con la forma asintótica de $j_l(\rho)$ $\rho \rightarrow \infty$

$$\psi(\vec{r}) \sim e^{ikz} + \frac{f(\theta, \varphi)}{r} e^{ikr} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(\cos \theta) + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \rightarrow (12)$$

$$\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) = \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2i} = \frac{e^{ikr} e^{-i\frac{l\pi}{2}} - e^{-ikr} e^{i\frac{l\pi}{2}}}{2i}$$

$$= \frac{(-i)^l e^{ikr} - (i)^l e^{-ikr}}{2i}$$

$$\psi(\vec{r}) \sim \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{2ikr} \left[(-i)^l e^{ikr} - (i)^l e^{-ikr} \right] P_l(\cos\theta) + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$$

$$\sim \frac{e^{ikr}}{2ikr} \left[2ik f(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} i^l (-i)^l (2l+1) P_l(\cos\theta) \right] - \frac{e^{-ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l i^l (2l+1) P_l(\cos\theta) \rightarrow (13)$$

Comparando los coeficientes de las exponenciales en las ecuaciones (10) y (13):

$$\psi(\vec{r}) \sim \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l (-i)^l e^{i\delta_l} P_l(\cos\theta) - \frac{e^{-ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l (i)^l e^{-i\delta_l} P_l(\cos\theta) \rightarrow (10)$$

$$A_l i^l e^{-i\delta_l} = i^l i^l (2l+1) \rightarrow A_l = i^l (2l+1) e^{i\delta_l} \rightarrow (14)$$

$$2ik f(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{i\delta_l} (-i)^l e^{i\delta_l} P_l(\cos\theta)$$

$$2ik f(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\delta_l} P_l(\cos\theta) \rightarrow S_l(k)$$

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[\frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{i\delta_l}}{k} \left[\frac{e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}}{2i} \right] P_l(\cos\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta) \rightarrow (15)$$

$$S_l(k) = e^{i\delta_l(k)}$$

matriz de dispersión

$l=0$ (onda S) ;

$l=2$ (onda D) ;

$l=4$ (onda G) ;

$l=1$ (onda P) ;

$l=3$ (onda F) ;

$l=5$ (onda H) ;

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta)$$

δ_l : cambios de fase
o corrimientos de fase

Por medio de esta ecuación podríamos calcular la sección diferencial, $|f(\theta)|^2$ y si conociéramos los valores de δ_l . Estos valores δ_l se llaman corrimientos de fase. Los corrimientos de fase δ_l se determinan calculando la solución de la ec. (6) para $r=a$ y estableciendo las condiciones de continuidad de R y $\frac{dR}{dr}$ en el punto $r=a$.

Otra cantidad que también puede determinarse experimentalmente es la llamada sección total, σ_T , la cual se define como

$$\sigma_T = \oint d\sigma(\theta, \varphi) = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \rightarrow (1.6)$$

$$d\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta)|^2 d\Omega \\ = |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = 2\delta_{ll'}$$

De la ecuación (15), aprovechando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, se deduce que,

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l \rightarrow (17)$$