

Dinámica Relativista

El problema fundamental del cálculo de variaciones, consiste en encontrar una función $x(t)$ que sea tal que la integral,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt \rightarrow (1)$$

tenga un valor extremo (máximo o mínimo). La relación funcional de L con $x, \dot{x}$ y t es conocida, lo que no se conoce es la relación funcional de x con t . Se puede reducir el problema a uno de cálculo diferencial mediante el siguiente artificio; sea $x(t)$ la función que buscamos, podemos entonces construir una familia de funciones,

$$\bar{x}(t, \alpha) = x(t) + \alpha \zeta(t), \rightarrow (2)$$
$$\zeta(t_1) = \zeta(t_2) = 0,$$

con

las cuales coinciden con $x(t)$ en los extremos del intervalo de integración. La integral {ec.(11)} se convierte en una función del parámetro continuo α ,

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) dt,$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

la cual tiene un valor extremal para $\alpha=0$; una condición necesaria para que esto ocurra es que,

$$\left(\frac{dS}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0.$$

Efectuando la derivación dentro de la integral α tomando en cuenta que de acuerdo con la ec.(2),

$$dS(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} dL(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} d\dot{\bar{x}} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right] dt$$

$$\left(\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \frac{d\dot{\bar{x}}}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{d\alpha} \right] dt = 0$$

$$\bar{x}(t, \alpha) = x(t) + \alpha \gamma(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t, \alpha) = \dot{x}(t) + \alpha \dot{\gamma}(t)$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\alpha} = \gamma(t)$$

$$\frac{d\dot{\bar{x}}}{d\alpha} = \dot{\gamma}(t)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \gamma(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \dot{\gamma}(t) + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \dot{x}}$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \gamma + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \dot{\gamma} \right) dt$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{\alpha=0} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{\alpha=0}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_{\alpha=0} \left(\frac{\partial \dot{\bar{x}}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

integration
per parts

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\gamma}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \gamma dt$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \gamma + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\gamma} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\gamma} dt$$

$$u = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$dv = \dot{\gamma}(t) dt$$

$$v = \gamma(t)$$

$$du = d \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x} dt$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x} dt$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \dot{x} dt,$$

Donde el último paso se obtuvo integrando por partes el segundo término dentro de la integral. Como por construcción $\dot{x}(t_1) = \dot{x}(t_2) = 0$, la parte integranda vale cero y como $\dot{x}(t)$ es arbitraria, la integración sólo puede valer cero si,

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Es decir, de Euler-Lagrange

→ (3)

Resolviendo esta ecuación diferencial se encuentran la función $x(t)$ que hace que la integral $\{cc. (1)\}$ tenga un valor extremo.

La Segunda ley de Newton para un movimiento conservativo unidimensional se puede obtener imponiendo la condición de que la acción entre los instantes t_1 y t_2 definida como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [E_{cinética} - E_{potencial}] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right] dt \rightarrow (4)$$

tenga un valor extremo (generalmente mínimo). En efecto, de acuerdo con la ec. (3) para que esto suceda es necesario que "x" satisfaga la ecuación,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

que no es más que la segunda ley de Newton: $F_x = m\ddot{x}$.
La función (energía cinética - energía potencial) se le llama lagrangiano del sistema.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (E_{\text{cinética}} - E_{\text{potencial}}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right] dt \rightarrow (4)$$

Para encontrar la ecuación del movimiento relativista de una partícula necesitamos primero redefinir la acción. Nos restringiremos al caso de una partícula libre. En la mecánica clásica la acción definida en la ecuación (4) posee las siguientes propiedades:

- 1) La variable de integración es un invariante de Galileo.
- 2) Si se efectúa una transformación de Galileo, la nueva acción deja a las ecuaciones de movimiento inalteradas; ya que para transformaciones de Galileo:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} (\dot{x}')^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} (\dot{x} - v)^2 dt = S - mv(x_2 - x_1) + \frac{mv^2}{2}(t_2 - t_1)$$

$\uparrow \dot{x}' = \dot{x} - v$

y como los dos últimos términos no van a depender del parámetro λ introducido en la ec. (2), se obtendrán con S' la misma ec. (3) que se obtuvo con S . $\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \right\}$

La acción en mecánica relativista la definiremos de modo que posea también estas dos propiedades, pero ahora con respecto a transformaciones de Lorentz.

Un invariante de Lorentz se deduce del intervalo

$$ds^2 = ds'^2$$

$$c^2(t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$(dt')^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx'}{dt'} \right)^2 \right] = (dt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]$$

Es decir, el elemento de tiempo propio $d\tau$,
definido como:

$$d\tau \equiv \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt \rightarrow (s)$$

es un invariante de Lorentz.

Si definimos la acción relativista como, $A = \text{cte}$

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} A d\tau = A \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} dt, \rightarrow (c)$$

quedarán satisfechas las dos condiciones mencionadas, atribu. La constante "A" la determinamos imponiendo la condición adicional de que para velocidades pequeñas, la acción coincida con la ecuación clásica del movimiento para una partícula libre,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} A \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} dt \approx \int_{t_1}^{t_2} A \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{2c^2}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(A - \frac{A}{2c^2} \dot{x}^2\right) dt$$

$$= A \int_{t_1}^{t_2} dt - \frac{A}{2c^2} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt$$

$$= A(t_2 - t_1) - \frac{A}{mc^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt ;$$

$$\sqrt{1 \pm a} \approx 1 \pm \frac{a}{2} + \dots$$

De aquí se deduce que la elección apropiada es $A = -mc^2$ (el término adicional $A(t_2 - t_1)$ no modifica la ecuación de movimiento). De este modo podemos considerar como lagrangiano relativista de una partícula libre a,

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

Por una generalización obvia para un movimiento en tres dimensiones, el Lagrangiano relativista será,

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow (7)$$

Los momentos canónicos P_i se definen como,

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (i=1,2,3) \rightarrow (8)$$

La energía total es,

$$E = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - L = \sum_{i=1}^3 \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \dot{x}_i - (-mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2})$$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mc^2(1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow (9)$$

La energía total expresada en función de los momentos, p ,
recibe el nombre de Hamiltoniano (ec. 18), $\left\{ p_i = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\}$

$$\frac{m^2 v^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}{m \sqrt{1-v^2/c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\frac{1}{m} p^2 \sqrt{1-v^2/c^2} + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\frac{p^2}{m} + mc^2 = \frac{mc^2}{(1-v^2/c^2)},$$

$$mc^2 \times \left\{ \frac{p^2}{m} + mc^2 = \frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)} \right\} \quad y \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 = \frac{m^2 c^4}{(1 - v^2/c^2)}$$

sacando la raíz

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= E = H$$

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \rightarrow (1a)$$

Un covector es un conjunto de cuatro cantidades w^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) que ante una transformación de Lorentz se transforman de la misma manera que las coordenadas, es decir como en la ecuación $(x^\mu)' = \sum_{\nu=0}^3 a_\nu^\mu x^\nu$, ($\mu = 0, 1, 2, 3$) $\rightarrow (*)$

$$(w^\mu)' = \sum_{\nu=0}^3 a_\nu^\mu w^\nu$$

De la ec. (7) se deduce que dx^μ son las componentes de un cuadrivector y por lo tanto, ya que según la invarianza del intervalo ($ds'^2 = ds^2$), la cantidad $d\tau$ es un invariante, $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ son también las componentes de un cuadrivector. La componente cero de este cuadrivector es,

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

y las tres componentes espaciales son,

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (i=1,2,3)$$

Combinando las ecs. (8) y (9) se deduce que E/c y $\vec{p}$ forman un cuadrivector, el cuadrivector del momento:

$$\left\{ \frac{E}{c}, \vec{p} \right\} = \left\{ \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\} \rightarrow (11)$$

La magnitud de este covector es constante e igual a mc :

$$\sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu} = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2} = \sqrt{\frac{m^2 c^2}{(1-v^2/c^2)} - \frac{m^2 v^2}{(1-v^2/c^2)}} = \sqrt{\frac{m^2 c^2 - m^2 v^2}{(1-v^2/c^2)}} = \sqrt{m^2 c^2} = mc \rightarrow (12)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(energía)

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(impulso)

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$$