

Mecánica Cuántica Relativista

La ecuación de Schrödinger para una partícula libre es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Se puede obtener formalmente a partir de la expresión clásica de la energía total, $E = \vec{p} \cdot \vec{p} / 2m$, haciendo éstas sustituciones,

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

→ (1)

luego los operadores se aplican sobre la función de onda $\psi(\vec{r}, t)$.

Si ahora empleamos la expresión relativista para la energía total de una partícula libre, $E^2 = c^2 \vec{p} \cdot \vec{p} + m^2 c^4$, y hacemos las sustituciones usando los operadores de la ec. (1).

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})\psi = c^2(-i\hbar \vec{\nabla}) \cdot (-i\hbar \vec{\nabla})\psi + m^2 c^4 \psi$$

$$i^2 \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = i^2 c^2 \hbar^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi$$

$$- \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -c^2 \hbar^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi \quad \times \left\{ -\frac{1}{c^2 \hbar^2} \right\}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi - \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi + \left(\frac{imc}{\hbar} \right)^2 \psi \rightarrow (2)$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon. La ecuación es invariante relativista, ya que el operador,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right),$$

es invariante frente a transformaciones de Lorentz.

Veamos algunas propiedades de la ecuación (2). La ecuación satisfecha por ψ^* es,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi^* + \left(\frac{-imc}{\hbar} \right)^2 \psi^* \rightarrow (3)$$

Multipliquemos la ec. (2) por ψ^* y la ec. (3) por ψ ; restando estas ecuaciones se encuentra que,

$$\frac{\psi^*}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \psi^* \nabla^2 \psi + \left(\frac{imc}{\hbar} \right)^2 \psi^* \psi$$

$$\frac{\psi}{c^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \psi \nabla^2 \psi^* + \left(\frac{imc}{\hbar} \right)^2 \psi \psi^*$$

Restando las,

$$\frac{1}{c^2} \left(\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = \psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi + \left(\frac{imc}{\hbar} \right)^2 (\psi \psi^* - \psi^* \psi)$$

$\frac{1}{\hbar^2} \frac{d}{dt} (\psi \psi^* - \psi^* \psi)$

$$\frac{1}{c^2} \left(\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) + (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = 0$$

lo cual es equivalente a,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

con,

$$\rho = \frac{\hbar^2}{2imc^2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \rightarrow (4)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

La expresión para $\vec{j}$ obtenida de esta manera es semejante al vector densidad de corriente de probabilidad obtenido para el caso no relativista.

Esta analogía nos induce a dar a $g(\vec{r}, t)$ la misma interpretación que en el caso no relativista, es decir $g(\vec{r}, t) d\tau$ sería la probabilidad de que la partícula se encuentre en el elemento de volumen $d\tau$ localizando en la vecindad del punto $\vec{r}$, en el instante t . Sin embargo, esta interpretación tropieza con una dificultad: $g(\vec{r}, t)$ dada por la ec. (4), no es una cantidad positiva definida, ya que en una ecuación de segunda orden como es la ecuación de Klein-Gordon, a ψ y $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ se les puede dar valores arbitrarios en un instante inicial cualquiera, y podría suceder que con estos valores arbitrarios la expresión {ec. (4)} resulte negativa.

Un campo electromagnético queda especificado por el cuadriector de los potenciales, $\{\vec{A}, i\phi\}$. La energía y el momento de una partícula libre forman otro cuadriector, $\{\vec{p}, iE/c\}$. El cuadriector del momento para una partícula de carga "e" en un campo electromagnético es,

$$\left\{ \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right), \frac{i}{c} (E - e\phi) \right\}$$

del hecho de que el cuadrado de la magnitud de este cuadriector es $(-m^2 c^2)$, se deduce que:

$$(E - e\phi)^2 = c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2 c^4 \rightarrow (S)$$

$$\sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu} = \sqrt{\left(\frac{i}{c} (E - e\phi) \right)^2 - \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} = imc$$

Si en esta fórmula (ec. 151) se usan los operadores de energía y momento y evaluamos en una función de onda, se obtiene

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right)^2 \psi = c^2 \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + m^2 c^4 \psi \quad \rightarrow (6)$$