Caos

Los estudios de sistemas caóticos brindan una excelente oportunidad para que los métodos computacionales contribuyan al progreso intelectual en las ciencias. Los métodos analíticos son de uso limitado, ya que el sistema es, por su propia definición, extremadamente complicado de seguir. Si bien los sistemas que son verdaderamente aleatorios pueden estudiarse mediante técnicas probabilísticas y los deterministas pueden ser atacados por muchos de los medios que hemos estudiado, el interés de este capítulo es precisamente la transición entre los dos dominios. Pensamos en el mundo como fundamentalmente determinista (al menos en la mecánica clásica) pero observamos un comportamiento caótico a nuestro alrededor. La pregunta que nos hacemos aquí es: ¿Cómo surge el comportamiento caótico de los sistemas deterministas? Normalmente tenemos alguna variable (o variables) que describen el estado del sistema físico (quizás más en un sentido dinámico que en un sentido estático) y una segunda variable (a menudo asociada o análoga a la temperatura) que regula el grado en que el comportamiento caótico está presente.

Caos

Un ejemplo es la reacción del agua a un aumento de temperatura. A temperatura ambiente, el movimiento del agua se describe en términos de corrientes de convección ordenadas. A temperaturas más altas, cuando hierve, el agua se encuentra en un estado totalmente caótico. Un descubrimiento notable reciente es que, aparentemente para todos los sistemas capaces de existir tanto en estados ordenados como caóticos, la transición entre los dos estados se rige por ciertas reglas basadas en dos constantes universales. Entonces, para estudiar estas reglas, basta con estudiar un sistema. Por supuesto, es necesario demostrar que las reglas son universales. Estudiaremos uno de esos sistemas matemáticos y luego compararemos los resultados con otros. En este capítulo sólo se ofrece una breve introducción al tema. Seguiremos el trabajo de Feigenbaum, quien investigó las consecuencias de la iteración funcional.

Iteración funcional

Muchos sistemas en la naturaleza exhiben un comportamiento no lineal. Un ejemplo comúnmente citado es el de la relación depredador-presa. Tomemos el caso de las poblaciones de lobos y conejos en un área determinada. Si solo hay unos pocos lobos, entonces todos tienen suficiente para comer y el número de lobos depende linealmente del número del año anterior con algún factor multiplicativo que exprese el grado de reproducción. Sin embargo, a medida que el número aumenta, el suministro de alimentos disminuye y un cierto número de lobos muere de hambre, disminuyendo el número neto.

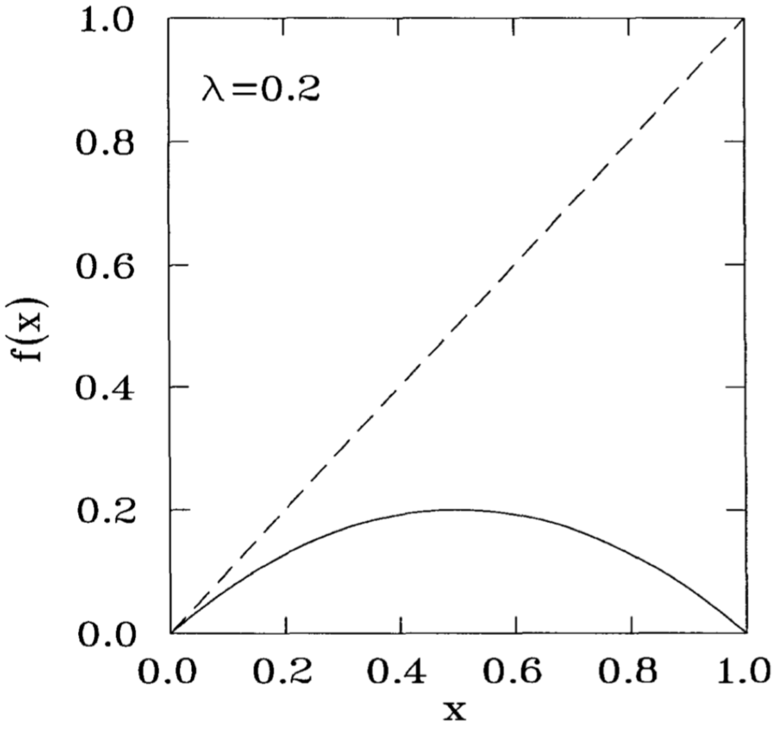


Fig. 9.1 $f(x)$ for $\lambda = 0.2$

Cuanto mayor sea el número de lobos, menor será el suministro de alimentos y más para comer lo que quede, por lo que este efecto depende cuadráticamente del número de lobos. Por lo tanto, si xn y xn + i son las poblaciones en dos años sucesivos, podríamos esperar una variación de año a año de la forma:

$$x_{n+1} = ax_n - bx_n^2.$$

Motivados por este modelo estudiaremos la forma funcional:

$$f(x) = 4\lambda x(1 - x) \tag{9.1}$$

discutir el comportamiento de la cantidad x (cuya variación es para representar la estabilidad, o falta de ella, del sistema) mientras que el parámetro A (análogo a la temperatura) es variable. Note que si 0 <x <1 y 0 <A <1 entonces 0 <f (x) <1 entonces, para este rango de A, permanecemos dentro de un sistema cerrado de valores para x. Ahora deseamos considerar la iteración funcional de esta ecuación, es decir,

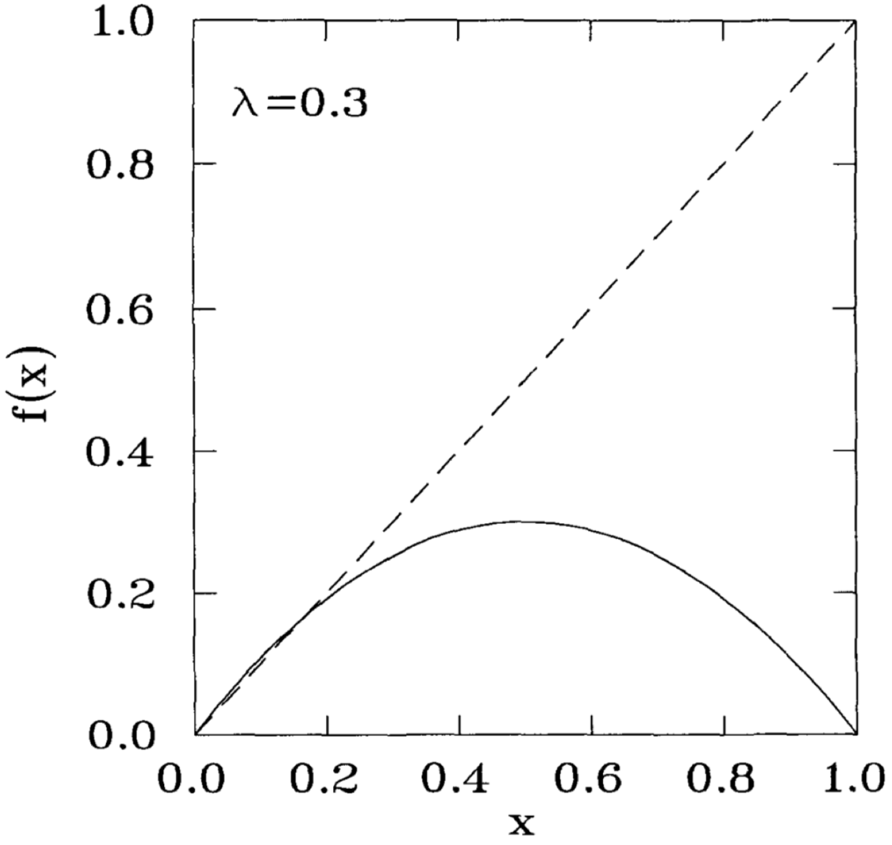


Fig. 9.2 $f(x)$ for $\lambda = 0.3$

elija un valor XQ y calcule

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) \\
x_2 &= f(x_1) &&= f(f(x_0)) \\
x_3 &= f(x_2) &&= f(f(f(x_0))) \\
x_4 &= f(x_3) &&. \\
&\vdots \quad \vdots \\
x_n &= f(x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

Preguntamos por el comportamiento de la secuencia de valores de {x,} bajo este proceso. Tenga en cuenta primero que x = 0 es un punto fijo de este sistema, es decir, si una vez tenemos x = 0, todos los valores siguientes de x en la secuencia son cero.

Podemos seguir el comportamiento de las Ecs. 9.2 gráficamente dibujando una línea diagonal y una representación de la función juntas. Por lo tanto, correspondiente a la secuencia de sustituciones

$$y = f(x)$$

$$x = y$$

$$y = f(x)$$

$$x = y$$

$$\vdots$$

que son equivalentes a las Ecs. 9.2 podemos:

- encontrar el valor de y correspondiente al valor actual de x usando el gráfico (dibuje una línea vertical en la x actual para intersecar la función),

- encontrar el valor de x correspondiente ax - y (dibujar una línea horizontal a la curva x = y), y repita el proceso.

Tenemos la funcional de interacción,

$$f(x) = 4\lambda x(1-x)$$

Elegimos un valor inicial, x_0, y encontramos el resto de ellos,

$$x_1 = f(x_0) \quad y \quad f(x_0) = 4\lambda x_0(1-x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$$

$$y \quad f(f(x_0)) = f(\underbrace{4\lambda x_0(1-x_0)}_{\text{valor conocido}})$$

$$x_3 = f(x_2)$$

$$\vdots$$

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Es fácil encontrar el número de puntos algebraicamente. Para x^* siendo un punto fijo debemos tener,

$$x^* = f(x^*) = 4\lambda x^*(1-x^*)$$

$$1 = 4\lambda(1-x^*)$$

despejo x^*:

$$(1-x^*) = \frac{1}{4\lambda} \rightarrow \boxed{x^* = 1 - \frac{1}{4\lambda}}$$

Para que x^* sea positivo tenemos,

$$\frac{1}{4\lambda} < 1 \quad y \quad \boxed{\lambda > \frac{1}{4}}$$

$$f(x^*) = 4\lambda x^*(1-x^*) = \cancel{4\lambda}\left(1-\frac{1}{4\lambda}\right)\frac{1}{\cancel{4\lambda}} = \left(1-\frac{1}{4\lambda}\right)$$

$$\boxed{f(x^*) = \left(1-\frac{1}{4\lambda}\right)}$$ donde x^* punto fijo

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} 4\lambda x(1-x) = \frac{d}{dx}(4\lambda x - 4\lambda x^2)$$

$$f'(x) = 4\lambda - 8\lambda x = 4\lambda(1-2x)$$

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx} f(x) = -8\lambda$$

$$f'(x^*) = 4\lambda(1-2x^*) = 4\lambda\left[1-2\left(1-\frac{1}{4\lambda}\right)\right]$$

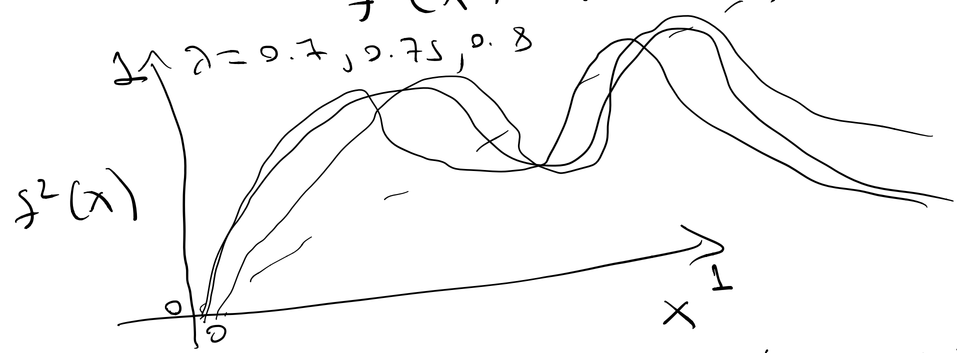
$$f'(x^*) = 4\lambda\left[1-2+\frac{1}{2\lambda}\right] = 4\lambda\left(-1+\frac{1}{2\lambda}\right)$$

$$\boxed{f'(x^*) = 2-4\lambda}$$

$$\boxed{f''(x^*) = -8\lambda}$$

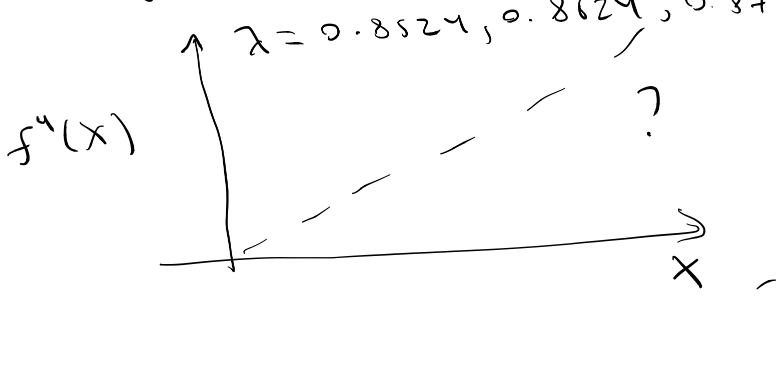
Considerar la función definida por la segunda interucción,

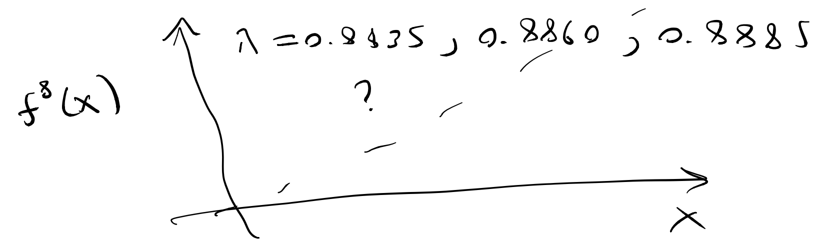
$$f^2(x) = f(f(x))$$



$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(f(f(x)))$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f(f(f(f(x))))$$




$\lambda = 0.8835$, 0.8860 , 0.8885
?
$f^8(x)$
x

1) Los puntos fijos para la función de iteracción de
$$f(x) = \lambda x(1-x^2),$$

$$x^* = f(x^*)$$

$$\cancel{x^*} = \lambda \cancel{x^*}(1-x^{*2}) \rightarrow 1 = \lambda(1-x^{*2})$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - x^{*2} \rightarrow x^{*2} = 1 - \frac{1}{\lambda} \quad \therefore x^* = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) > 0 \qquad 1 > \frac{1}{\lambda} \rightarrow \boxed{\lambda > 1}$$

2) Para la función de iteracción,
$$f(x) = \lambda \operatorname{sen}(\pi x)$$

los puntos fijos son,
$$x^* = f(x^*), \qquad x^* = \lambda \operatorname{sen}(\pi x^*)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}(\pi x^*) = \pi x^* - \frac{(\pi x^*)^3}{3!} = \pi x^* - \frac{\pi^3 x^{*3}}{6}$$

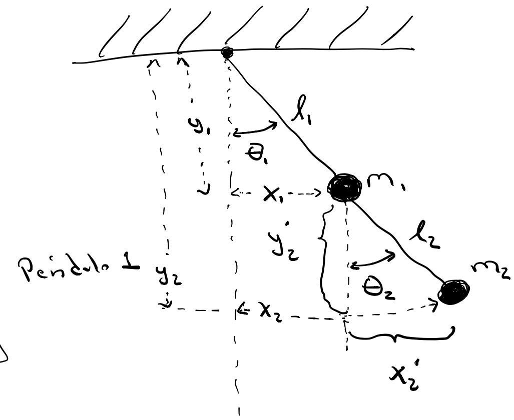
$$\cancel{x^*} = \pi \cancel{x^*} - \frac{\pi^3 x^{*3}}{6}$$

$$1 = \pi - \frac{\pi^3 x^{*2}}{6} \rightarrow \frac{\pi^3}{6} x^{*2} = \pi - 1$$

$$x^{*2} = \frac{6}{\pi^3}(\pi - 1) \rightarrow x^* = \pm\sqrt{\frac{6}{\pi^3}(\pi-1)}$$

$$x^* = \pm\sqrt{12.27} \simeq \pm 3.5029$$

El péndulo caótico



Pendúlo 1: m_1, l_1 y θ_1

Péndulo 2: m_2, l_2 y θ_2

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{x_1}{l_1} \rightarrow \boxed{x_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1}$$

$$\cos\theta_1 = -\frac{y_1}{l_1} \rightarrow \boxed{y_1 = -l_1\cos\theta_1}$$

$$x_2 = x_1 + x_2' \quad \text{y} \quad y_2 = y_1 + y_2'$$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{x_2'}{l_2} \rightarrow \boxed{x_2' = l_2 \operatorname{sen}\theta_2}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{-y_2'}{l_2} \rightarrow \boxed{y_2' = -l_2\cos\theta_2}$$

Péndulo 2

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + x_2' = l_1\operatorname{sen}\theta_1 + l_2\operatorname{sen}\theta_2 \\ y_2 &= y_1 + y_2' = -l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2 \end{aligned}\right\} \text{Péndulo 2}$$

Usaremos el formalismo de Euler-Lagrange:

$$L = T - V \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$i = 1, 2$ donde $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0 \end{aligned}}$$

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

Para encontrar la energía cinética derivamos x_1, y_1, x_2 y y_2 con respecto al tiempo.

$$V = m_1 g(-l_1\cos\theta_1) + m_2 g(-l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2)$$

$V = -l_1 m_1 g \cos\theta_1 - l_1 m_2 g \cos\theta_1 - l_2 m_2 g \cos\theta_2 \rightarrow$ energía potencial

$$\boxed{V = -l_1 g (m_1 + m_2)\cos\theta_1 - l_2 m_2 g \cos\theta_2}$$

$x_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1$

$\frac{d}{dt} x_1 = \dot{x}_1 = l_1 \frac{d}{dt} \operatorname{sen}\theta_1 = l_1 \cos\theta_1 \frac{d\theta_1}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1$

$$\boxed{\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1}$$

$y_1 = -l_1 \cos\theta_1$

$$\boxed{\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1}$$

$x_2 = x_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2$

$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2$

$$\boxed{\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2}$$

$y_2 = y_1 - l_2 \cos\theta_2$

$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2$

$$\boxed{\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left[(l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1)^2 \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[(l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2)^2 \right]$$

$T = \frac{1}{2} m_1 \Big[$

$\rightarrow$ Energía cinética

$L = T - V$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \Big[\overbrace{l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_1}^{l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1) = l_1^2 \dot{\theta}_1^2} \Big] + \frac{1}{2} m_2 \, *$$

$$* \Big[\underbrace{l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_1}_{l_1^2 \dot{\theta}_1^2} + \underbrace{2 l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \, l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + 2 l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1 \, l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2}_{2 l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} + \underbrace{l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2\theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \operatorname{sen}^2\theta_2}_{l_2^2 \dot{\theta}_2^2} \Big]$$

$$\underbrace{\cos(\theta_1 - \theta_2)}_{(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$
$$- \left[- l_1 g (m_1 + m_2) \cos\theta_1 - l_2 g m_2 \cos\theta_2 \right]$$

Para θ_1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 \left[2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} m_2 \left[-2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2) \right] - \left[l_1 g (m_1 + m_2) \,\mathrm{sen}\,\theta_1 \right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 \left[2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \right]$$

$$\Rightarrow m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 \left[2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2) - 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2) \right] - \left[l_1 g (m_1 + m_2)\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \right] = 0$$

$$- \left[\frac{1}{2} m_2 \left[-2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2) \right] \right]$$

↳ Primer ecuación diferencial del péndulo caótico

Para θ_2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2} = \frac{1}{\cancel{2}} m_2 \left[\cancel{2} l_2^2 \dot\theta_2 + \cancel{2} l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2)\right] = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$** \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} m_2 \left[\underbrace{-} 2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\underbrace{(-1)}\right] - \left[+ l_2 g m_2 \operatorname{sen}\theta_2\right]$$

$$= m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - l_2 g m_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$* \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} & m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2) \\ & - \left[m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - l_2 g m_2 \operatorname{sen}\theta_2\right] = 0 \end{aligned}}$$

↳ Segunda ecuación diferencial del péndulo caótico

Ecuaciones diferenciales del péndulo caótico:

$$\bullet\ (m_1+m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 (\dot\theta_1 - \dot\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)$$
$$+ m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) + l_1 g (m_1+m_2) \operatorname{sen}\theta_1 = 0$$

$$\bullet\bullet\ m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2)$$
$$- m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) + l_2 g m_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

Para resolverlas pueden considerar:

a) Pequeñas oscilaciones: $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \approx 1$

b) Cambio de variables: $\frac{d\theta_1}{dt} = w_1$, $\frac{d\theta_2}{dt} = w_2$

$$* \ (m_1+m_2) l_1^2 \dot w_1 + m_2 l_1 l_2 \dot w_2 + m_2 l_1 l_2 w_2 (w_1 - w_2)(\theta_1-\theta_2)$$
$$+ m_2 l_1 l_2 w_1 w_2 (\theta_1-\theta_2) + l_1 g (m_1+m_2)\theta_1 = 0$$

** $m_2 l_2^2 \dot{\omega}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\omega}_1 - m_2 l_1 l_2 \omega_1 (\theta_1 - \theta_2)(\omega_1 - \omega_2)$
$- m_2 l_1 l_2 \omega_1 \omega_2 (\theta_1 - \theta_2) + l_2 g m_2 \theta_2 = 0$

↳ Pequeñas oscilaciones

$(\theta_1 - \theta_2) = 0$ y tenemos las ecuaciones:

a) $(m_1+m_2) l_1^2 \dot{\omega}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\omega}_2 + l_1 g (m_1+m_2)\theta_1 = 0$

b) $m_2 l_2^2 \dot{\omega}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\omega}_1 + l_2 g m_2 \theta_2 = 0$

De la ecuación (a) elimino un l_1
De la ecuación (b) elimino un l_2

a) $(m_1+m_2) l_1 \dot{\omega}_1 + m_2 l_2 \dot{\omega}_2 + g(m_1+m_2)\theta_1 = 0$

b) $m_2 l_2 \dot{\omega}_2 + m_2 l_1 \dot{\omega}_1 + g m_2 \theta_2 = 0$

Sustituyo de la ec.(b) el término $m_2 l_2 \dot{\omega}_2$ en la ec.(a):

$(m_1+m_2) l_1 \dot{\omega}_1 + (-m_2 l_1 \dot{\omega}_1 - g m_2 \theta_2) + g(m_1+m_2)\theta_1 = 0$

$m_1 l_1 \dot{\omega}_1 + \cancel{m_2 l_1 \dot{\omega}_1} - \cancel{m_2 l_1 \dot{\omega}_1} - g m_2 \theta_2 + g(m_1+m_2)\theta_1 = 0$

$m_1 l_1 \dot{\omega}_1 + g(m_1+m_2)\theta_1 - g m_2 \theta_2 = 0$

$\omega_1 = \dfrac{d\theta_1}{dt} = \dot{\theta}_1$

$$\boxed{m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + g(m_1+m_2)\theta_1 - g m_2 \theta_2 = 0}$$

→ multiplicando por $\dfrac{m_2}{m_1}$:

$m_2 l_1 \dot{\omega}_1 + \frac{m_2}{m_1} g (m_1+m_2)\theta_1 - g\frac{m_2^2}{m_1}\theta_2 = 0$

sustituyendo en la ec. (b):

$$m_2 l_2 \dot{\omega}_2 + \left(g\frac{m_2^2}{m_1}\theta_2 - \frac{m_2}{m_1}g(m_1+m_2)\theta_1 \right) + g m_2 \theta_2 = 0$$

$\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = \dot{\theta}_2$, agrupando:

$$\boxed{m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + g m_2\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)\theta_2 - \frac{m_2 g}{m_1}(m_1+m_2)\theta_1 = 0}$$

Estas ecuaciones se pueden programar usando los métodos numéricos de la clase.

Ecuaciónes diferenciales del péndulo doble para pequeñas oscilaciones $\qquad m = \frac{m_2}{m_1}$

a) $m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + g(m_1+m_2)\theta_1 - g m_2 \theta_2 = 0$

b) $m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + g m_2 (m+1)\theta_2 - m g(m_1+m_2)\theta_1 = 0$

Tomando la segunda derivada en las ecs. (a) y (b):

c) $m_1 l_1 \ddddot{\theta}_1 + g(m_1+m_2)\ddot{\theta}_1 - g m_2 \ddot{\theta}_2 = 0$

d) $m_2 l_2 \ddddot{\theta}_2 + g m_2 (m+1)\ddot{\theta}_2 - m g(m_1+m_2)\ddot{\theta}_1 = 0$

Multiplico la ec. (a) por m y la sumo a la ec. (b):

$$\left[m m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m g(m_1+\cancel{m_2})\theta_1 - g m \cancel{m_2}\theta_2\right] + \left[m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + g m_2 (m+\cancel{1})\theta_2 - m g(m_1+\cancel{m_2})\theta_1\right] = 0$$

$\left[\begin{array}{l}\text{uso la ec. (d)}\\ \text{para } \ddot{\theta}_1\end{array}\right]$

$$m m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m m_2 g \theta_2 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = 0$$

$$m_1 l_1 \times \left\{ m \ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 l_2}{g(m_1+m_2)}\ddddot{\theta}_2 + \frac{\cancel{g} m_2(m+1)}{\cancel{g}(m_1+m_2)}\ddot{\theta}_2 = \frac{m_2 l_2}{g(m_1+m_2)}\ddddot{\theta}_2 + \frac{m_2(m+1)}{(m_1+m_2)}\ddot{\theta}_2 \right.$$

$$m_1 l_1 m \ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 m_1 l_1 l_2}{g(m_1+m_2)}\ddddot{\theta}_2 + \frac{m_1 l_1 m_2 (m+1)}{(m_1+m_2)}\ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\cancel{m_2} m_1 l_1 l_2}{g(m_1+m_2)}\ddddot{\theta}_2 + \frac{m_1 l_1 \cancel{m_2}(m+1)}{(m_1+m_2)}\ddot{\theta}_2 + \cancel{m_2} l_2 \ddot{\theta}_2 + m \cancel{m_2} g \theta_2 = 0$$

Organizando:

$$\underbrace{\frac{m_1 l_1 l_2}{g(m_1+m_2)}}_{\alpha}\ddddot{\theta}_2 + \underbrace{\left[\frac{m_1 l_1 (m+1)}{(m_1+m_2)} + l_2\right]}_{\beta}\ddot{\theta}_2 + \underbrace{mg}_{\gamma}\theta_2 = 0$$

$$\boxed{\alpha \ddddot{\theta}_2 + \beta \ddot{\theta}_2 + \gamma \theta_2 = 0}$$

Usando la expansión de Taylor para la 4ta derivada.

$$+\begin{cases} f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0) \\ f(x_0-h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0) \end{cases}$$

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x_0)$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{12}{h^4}\left[f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) - h^2 f''(x_0)\right]$$

En la malla para una función U:

$$U_i^{(4)} \simeq \frac{12}{h^4}\left[U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i - h^2 U_i''\right] \quad y$$

$$U_i'' = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

$$\alpha \dddot{\theta}_2 + \beta \ddot{\theta}_2 + \gamma \theta_2 = 0$$

$$\alpha \frac{12}{h^4}\left[U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i - h^2 U_i''\right] + \frac{\beta}{h^2}\left[U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}\right]$$

$$+ \gamma U_i = 0$$

Despejar U_{i+1} para encontrar la ecuación recursiva:

$$U_{i+1}\left[\frac{12\alpha}{h^4} + \frac{\beta}{h^2}\right] = \frac{12}{h^4}\left[2U_i + h^2 U_i - U_{i-1}\right] + \frac{\beta}{h^2}\left[2U_i - U_{i+1} - U_{i-1}\right]$$

$$- \gamma U_i$$

$$U_{i+1} \simeq \frac{12}{h^4\left[\frac{12\alpha}{h^4} + \frac{\beta}{h^2}\right]}\left[2U_i + h^2 U_i'' - U_{i-1}\right] + \frac{\beta\left[2U_i - U_{i-1} - U_{i-1}\right]}{h^2\left[\frac{12\alpha}{h^4} + \frac{\beta}{h^2}\right]}$$

$$- \frac{\gamma U_i}{\left[\frac{12\alpha}{h^4} + \frac{\beta}{h^2}\right]}$$

Solución para $\theta_2(t)$ del péndulo doble "ecuación recursiva".

Obtener para $\theta_1(t)$ la solución de la ecuación recursiva

Algoritmos

- ***Subroutina que calcula la función interaccional***
- ***Subroutina que calcula los puntos fijos***
- ***Subroutina que calcula los números de Feigenbaums***

```
function fn(y)
implicit real *8 (a-h,o-z)
common /lambda/al,eta,n
m=2**n
bl=4.*al
x=y
do i=1,m
x=bl*x*(1.-x)
enddo
fn=x
return
end
function dn(y)
implicit real *8 (a-h,o-z)
common /lambda/al,eta,n
m=2**n
bl=4.*al
x=y
d=1.
do i=1,m
d=d*bl*(1.-2.*x)
x=bl*x*(1.-x)
enddo
dn=d
return
end
```

Subroutina que calcula la función interaccional

```
      function ffp(dum)    ! subroutine to find fixed point
      implicit real *8 (a-h,o-z)
      common /lambda/al,eta,n
      xl=.5-eta
      xu=.5+eta
      dd=fn(xl)-xl      ! check for boundaries for Newton's method
      if (dd/(fn(xu)-xu).gt.0.) then
      print *,n,'no solution'  ! if there are an even number of
      return                   ! solutions between the limits then
      endif                    ! give up
      do 1 i=1,40          ! otherwise find fixed point
      x=.5*(xl+xu)
      y=fn(x)
      if ((y-x)/dd.lt.0.) then
      xu=x
      else
      xl=x
      endif
1     continue    ! leaves loop with x= fixed point
      ffp=.5*(xl+xu)
      return
      end
```

Subroutina que calcula los números de Feigenbaums

```
C program to compute Feigenbaum's numbers
C Uses the form x=4 lambda x (1-x).
      implicit real *8 (a-h,o-z)
      common /lambda/al,eta,n
      dimension alv(20),d(20),xs(20)
      open(1,file='fig.out',status='unknown')
      alv(1)=0.25
      alv(2)=0.75
      d(1)=0.5
      d(2)=0.25
      eta=0.1*2.5029   ! initialize fixed point range about 0.5
```

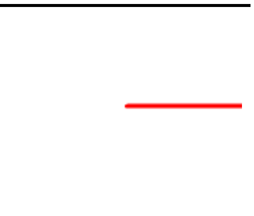
```
   dif=0.01          ! initialize lambda search spacing
   do 10 n=1,13      ! do on the order of the functions
   eta=eta/2.5029    ! update spacing on the fixed point range
   al=alv(n+1)+dif   ! initial value of lambda
   do 2 j=1,100      ! start search for critical lambda
   x=ffp(dum)        ! find fixed point
   der=dn(x)  ! now find the derivative at the fixed point
   t=1.+der    ! is the derivative greater
   if (t.le.0) goto 11    ! or less than minus one
   al=al+dif        ! if we are going in the right direction
   tl=t             ! continue on
   all=al-dif
 2 continue
11 tu=t
   alu=al
12 al=.5*(all+alu)  ! now do Newton's on lambda
   x=ffp(dum)
   der=dn(x)
   t=1.+der
   if (t*tl.gt.0.) then
   all=al
   tl=t
   else
   alu=al
   tu=t
   endif
   if (alu-all.gt.10.**(-14)) goto 12
   alv(n+2)=al
   d(n+2)=abs(x-.5)
```

```
      alp=(d(n+1)-d(n))/(d(n+2)-d(n+1))
      del=(alv(n+1)-alv(n))/(alv(n+2)-alv(n+1))
      dif=.1*(alv(n+1)-alv(n))/del!estimate a new step for lambda
      write (1,22) n,del,alp,al,x
      print 22, n,del,alp,al,x
 22   format(i3,2f15.12,2f21.18)
 10   continue
      end
```

Doble péndulo

En general, un **péndulo doble** o **doble péndulo** es un sistema compuesto por dos péndulos, con el segundo colgando del extremo del primero. En el caso más simple, se trata de dos péndulos simples, con el inferior colgando de la masa pendular del superior.

Normalmente se sobreentiende que nos referimos a un **doble péndulo plano**, con dos péndulos planos coplanarios. Este sistema físico posee dos grados de libertad y exhibe un rico comportamiento dinámico. Su movimiento está gobernado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. Por encima de cierta energía, su movimiento es caótico.

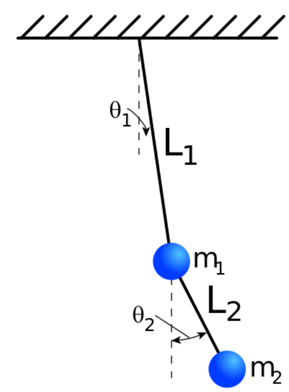


Un ejemplo de movimiento caótico de un péndulo doble.

Índice

Análisis del movimiento del péndulo doble plano

Cinemática



Movimiento de un doble péndulo.

En la cinemática sólo estamos interesados en encontrar las expresiones de la posición, la velocidad, la aceleración y en términos de las variables que especifican el estado del doble péndulo, sin interesarnos por las fuerzas actuantes. Nos serviremos de las siguientes coordenadas:

- x,y = posición horizontal y vertical de la masa de un péndulo
- θ = ángulo de un péndulo respecto a la vertical (0 = vertical hacia abajo, antihorario es positivo)
- l = longitud de la varilla (constante)

Asociaremos al péndulo superior el subíndice 1, y al de abajo el subíndice 2. Pondremos el origen de coordenadas en el punto de pivote del péndulo superior. El sentido de las ordenadas crecientes se toma hacia arriba.

A partir de consideraciones trigonométricas escribimos las expresiones de las posiciones x_1, y_1, x_2, y_2 en términos de los ángulos θ_1, θ_2:

$$\begin{aligned}
x_1 &= l_1 \sin\theta_1 \\
y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 \\
x_2 &= x_1 + l_2 \sin\theta_2 \\
y_2 &= y_1 - l_2 \cos\theta_2
\end{aligned}$$

Derivando con respecto al tiempo obtenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 \\
\dot{y}_1 &= \dot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1 \\
\dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2 \\
\dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin\theta_2
\end{aligned}$$

Y derivando una segunda vez:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin\theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 \\
\ddot{y}_1 &= \dot{\theta}_1^2 l_1 \cos\theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1 \\
\ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 - \dot{\theta}_2^2 l_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2 \\
\ddot{y}_2 &= \ddot{y}_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 \cos\theta_2 + \ddot{\theta}_2 l_2 \sin\theta_2
\end{aligned}$$

Fuerzas

Definimos las variables:

Símbolo	Nombre
T	Tensión en la varilla
M	Masa del péndulo
g	Aceleración de la gravedad

Usaremos la ley de Newton $F = ma$, escribiendo por separado las ecuaciones de las componentes verticales y horizontales de las fuerzas.

Sobre la masa m_1 actúan la tensión en la parte superior de la varilla T_1, la tensión en la parte inferior de la varillaT_2, y la gravedad -$m_1 g$:

$$m_1\ddot{x}_1 = -T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2$$
$$m_1\ddot{y}_1 = T_1\cos\theta_1 - T_2\cos\theta_2 - m_1 g$$

Sobre la masa m_2, actúan la tensión T_2 y la gravedad $-m_2 g$:

$$m_2\ddot{x}_2 = -T_2\sin\theta_2$$
$$m_2\ddot{y}_2 = T_2\cos\theta_2 - m_2 g$$

Ecuaciones de movimiento

A partir de las ecuaciones anteriores, tras realizar numerosas operaciones algebraicas con la finalidad de encontrar las expresiones de $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ en términos de θ_1 , $\dot{\theta}_1$, θ_2 , $\dot{\theta}_2$, llegaríamos a las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1+m_2)\sin\theta_1 - m_2 g\sin(\theta_1-2\theta_2) - 2\sin(\theta_1-\theta_2)m_2(\dot{\theta}_2^2 l_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1\cos(\theta_1-\theta_2))}{l_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2\cos(\theta_1-\theta_2))}{l_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))}$$

Energía

La energía cinética viene expresada por:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)]$$

La energía potencial :

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1+m_2)g l_1\cos\theta_1 - m_2 g l_2\cos\theta_2\ .$$

Por tanto, el movimiento se regirá por la lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2)g l_1\cos\theta_1 + m_2 g l_2\cos\theta_2$$

Ecuaciones de movimiento de Lagrange

Usando las ecuaciones de Lagrange en este caso particular son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0$$

Calculando explícitamente las derivadas de la expresión anterior se llega a:

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2\ddot{\theta}_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2\dot{\theta}_2 l_1 l_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2) + m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2)g l_1\sin\theta_1 = 0 \\ m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2\ddot{\theta}_1 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2\dot{\theta}_1 l_1 l_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2) - m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2) + m_2 g l_2\sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Simplificando obtenemos:

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1^2\ddot\theta_1 + m_2\ddot\theta_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2) + m_2\dot\theta_2^2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0 \\ m_2 l_2^2\ddot\theta_2 + m_2\ddot\theta_1 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2\dot\theta_1^2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2) + m_2 g l_2\sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Estas son las ecuaciones de Lagrange para un péndulo doble en el que hemos escogido como coordenadas generalizadas las polares y en el que hay dos ligaduras(l_1 y l_2 constantes).

Véase también

- Péndulo
- Péndulo balístico
- Péndulo cicloidal
- Péndulo cónico
- Péndulo de Foucault
- Péndulo de Newton
- Péndulo de Pohl
- Péndulo de torsión
- Péndulo esférico
- Péndulo físico
- Péndulo simple
- Péndulo simple equivalente

Bibliografía

- Marion, Jerry B. (1996). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Barcelona: Ed. Reverté. ISBN 84-291-4094-8.

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Double Pendulum» (http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html). *ScienceWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- Animación que muestra movimiento del péndulo doble y reparto de energía entre uno y otro péndulo (http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Systemes/pendule_double.html)
- Curso Interactivo de Física en Internet. (http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/) Ángel Franco García.