

== Mecánica Clásica ==

Aproximación Newtoniana

Se conoce $F = m\vec{a}$, denotando el momento por \vec{p} , tenemos la versión de la segunda Ley de Newton,

$$(1) \dots \vec{F} = \dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ si } m \text{ es independiente del tiempo, } \vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$, si $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ entonces eq. (1) representa el conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden en (x, y, z) .

Aproximación Lagrangiana

Sea K o T la energía cinética de una partícula y sea $V = U$ la energía potencial (en muchos casos depende sólo de posición).

$$L \equiv T - V \text{ , llamada el Lagrangiano}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3$$

$q \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$ coordenadas generalizadas

"Ecuaciones de Lagrange"

Aproximación Hamiltoniana

Definiendo el momento generalizado por

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j=1, 2, \dots, 3N$$

Definimos la función Hamiltoniana para un sistema con $3N$ grados de libertad y n partículas,

$$H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) = \sum_{j=1}^3 p_j \dot{q}_j - L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, q_1, q_2, q_3)$$

El Hamiltoniano es la suma de todas las energías y en función de los momentos,

$$H = T + V = \text{energía total}$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad -\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j=1, 2, \dots, 3N$$

"Ecuaciones de Hamilton de movimiento"

Mecánica Cuántica

Un concepto fundamental de la mecánica cuántica es la así llamada función de onda, $\psi(\vec{q}, t)$ (donde \vec{q} representa el conjunto de coordenadas necesario para describir el sistema). Con la función de onda se da la interpretación física de la probabilidad de encontrar el sistema en el tiempo, t , en el sistema es encontrado entre q_1 y $q_1 + dq_1$, q_2 y $q_2 + dq_2$, etc. - -

$$\psi^*(\vec{q}, t) \psi(\vec{q}, t) dq_1 dq_2 \dots dq_{3N}$$

$$dq_1 \dots dq_{3N} \rightarrow d\vec{q}$$

$$\int \psi^*(\vec{q}, t) \psi(\vec{q}, t) d\vec{q} = 1$$

(El sistema se puede encontrar)

Si esta última ecuación se satisface, entonces ψ está normalizada.

Si se demuestran la parte independiente del tiempo de $\psi(\vec{q}, t)$ por $\psi(\vec{q})$, entonces se dice de un estado estacionario.

En el resto del curso se tratará sólo de estados estacionarios.

La función de onda, ψ , es dada como la solución de la ecuación de Schrödinger,

$$\mathcal{H}\psi = E\psi$$

Hamiltoniano, y E es una cantidad escalar correspondiente a donde \mathcal{H} es el operador del

a la energía del sistema. El operador del Hamiltoniano es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(x, y, z)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z)$$

ψ es llamada una eigenfunción del operador H , y E es llamada un eigenvalor. Se tendrán varios ψ y E , denotados

$$H\psi_j = E_j\psi_j$$

== Termodinámica ==

Entropía Denotada por el símbolo S , y tiene la forma matemática siguiente

$$S_f - S_i = \int_{R_i}^f \frac{dQ}{T} \quad \text{y la forma diferencial exacta, } dS = \frac{dQ}{T}$$

Formulación matemática de la segunda ley de la termodinámica.

Variables termodinámicas:

P : presión, T : temperatura, V : volumen,

C_p : calor específico a presión constante

C_v : calor específico a volumen constante

U ó E : energía interna

Gas ideal:

$$PV = nRT$$

$$U = U(T)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$$

$$dQ_R = C_p dT - V dP$$

$$dQ_R = C_v dT + P dV$$

$$C_p = C_v + nR$$

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

$$\gamma = C_p / C_v$$

- Adiabáticos ($dQ=0$)
 - Isobáricos (presión constante)
 - Isocóricos (volumen constante)
 - Isotérmicos (temperatura constante)
- $$C = \frac{dQ}{dT} \quad \left(\begin{array}{l} \text{capacidad} \\ \text{de calor} \end{array} \right)$$

$$dW = P dV \quad (\text{trabajo})$$

$$dU = T dS - P dV \quad (\text{1ª ley de la termodinámica})$$

$$dQ = dU + dW \quad (\text{2ª ley termodinámica})$$

$$S = \int C_p \frac{dT}{T} - nR \ln(P) + S_0$$

$$S = \int C_v \frac{dT}{T} + nR \ln(V) + S_0$$

Entalpía

La entalpía de un sistema, H , es definida como

$$H = U + PV$$
$$dH = dU + PdV + VdP \quad \text{y} \quad \delta Q = dU + PdV$$
$$\boxed{dH = \delta Q + VdP}$$

$$\left(\frac{dH}{dT}\right)_P = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_P = C_p \quad (\text{propiedad 1})$$

$$H_2 - H_1 = \int_1^2 C_p dT \quad (\text{substituir propiedad 2})$$

$$H_2 - H_1 = \int_1^2 V dP \quad (\text{integrar propiedad 3})$$

La función de Helmholtz

La función de Helmholtz, A , es definida como

$$A = U - TS$$

$$dA = dU - TdS - SdT \quad \text{y} \quad TdS = dU + PdV$$

$$\boxed{dA = -PdV - SdT}$$

$$A_2 - A_1 = - \int_1^2 PdV \quad (\text{Isotérmica})$$

$$dA = 0$$

$$A = \text{constante} \quad \begin{matrix} (\text{Isotérmica}) \\ (\text{Isobárica}) \end{matrix}$$

Si $A = A(V, T)$,

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_V dT \quad \text{componentes con } dA,$$

$$P = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_T \quad \text{y} \quad S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_V$$

Función de Gibbs

La función de Gibbs, G , es definida como

$$G = H - TS$$

$$dG = dH - Tds - SdT$$

$$dH = dQ + VdP$$

$$dH = Tds + VdP$$

$$dQ = Tds$$

$$dG = VdP - SdT$$

$$dG = 0$$

(isotérmico)

$$G = \text{constante}$$

(isobárico)

(reversible)

Si $G = G(P, T)$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P dT$$

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T$$

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P$$

== Ecuaciones de Maxwell ==

Recordando:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$
$$dz = M dx + N dy \quad \text{con} \quad M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \quad ; \quad N = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y} \rightarrow \text{(*) Condición para una diferencial exacta}$$

De las cuatro relaciones diferenciales para dU , dH , dA y dG ,

$$dU = T ds - P dv \quad \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_v \quad (1)$$

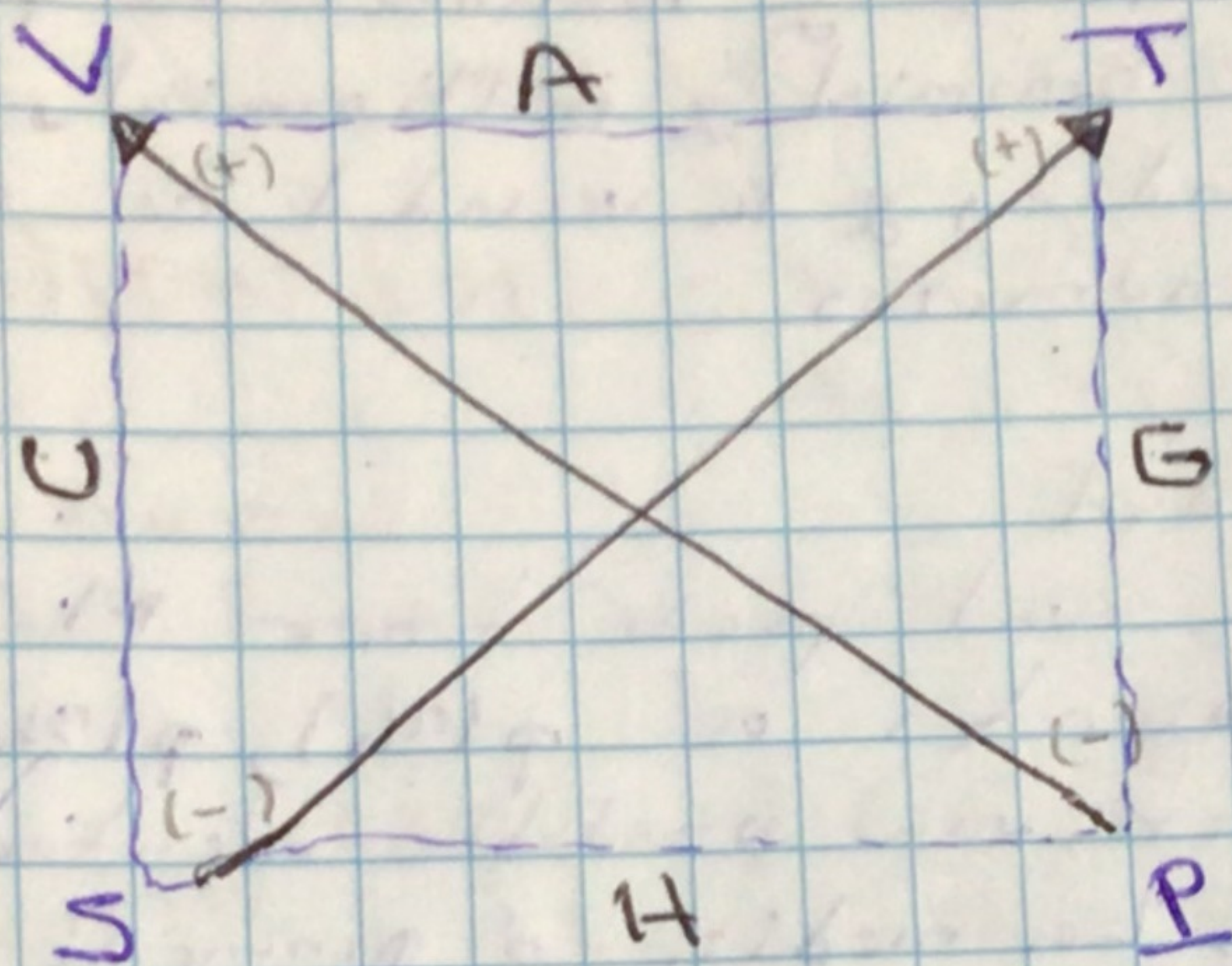
$$dH = T ds + v dp \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \quad (2)$$

$$dA = -P dv - s dt \quad \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_t \quad (3)$$

$$dG = v dp - s dt \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_t \quad (4)$$

Estas 4 ecuaciones son conocidas como "Ecuaciones de Maxwell"

Diagrama nemotónico de König-Born



$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = - \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$$

== Matemáticas ==

Se discutirán variables aleatorias y funciones de probabilidad, aproximación de Stirling's, el coeficiente binomial y multinomial, el método de Lagrange de multiplicadores undetermined, y la vecindad de coeficientes binomiales y multinomiales para grandes números.

Distribuciones de probabilidad

Sea x una variable la cual puede tener M valores discretos x_1, x_2, \dots, x_M con probabilidades correspondientes a $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_M)$. La variable x es dicha a ser una variable aleatoria discreta, y $p(x)$ es una distribución discreta. La media o promedio, y el valor de x es

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^M x_j p(x_j)}{\sum_{j=1}^M p(x_j)}$$

$p(x_j)$ es una probabilidad y debe ser normalizada; esto es $\sum_{j=1}^M p(x_j) = 1$. La media de una función de x , $f(x)$, es dada por

$$\overline{f(x)} = \sum_{j=1}^M f(x_j) p(x_j) \quad f(x) = \begin{cases} x^m & \Rightarrow \overline{f(x)} \text{ mth momento de la distribución } p(x) \\ (x - \bar{x})^m & \Rightarrow \overline{f(x)} \text{ mth momento central} \end{cases}$$

- La media de $(x - \bar{x})^2$ es llamada la varianza.
- La raíz cuadrada de la varianza es la desviación estándar.

Distribución de Poisson

$$P(m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Si la variable aleatoria U es continua (menos discreta), entonces $p(u)du$ es la probabilidad de que la variable aleatoria U caiga entre u y $u+du$. La media de alguna función de U es,

$$\overline{f(u)} = \int f(u)p(u) du \quad ; \text{ los límites de esta integral son del rango de } U.$$

Distribución Gaussiana

Es la más importante función de distribución continua.

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

σ^2 : es la varianza y controla la anchura de esta distribución.
 $\lim \sigma \rightarrow 0 \Rightarrow p(x)$ se hace una función delta.

Aproximación de Stirling's

La aproximación asintótica de $\ln N!$ se le llama aproximación de Stirling's.

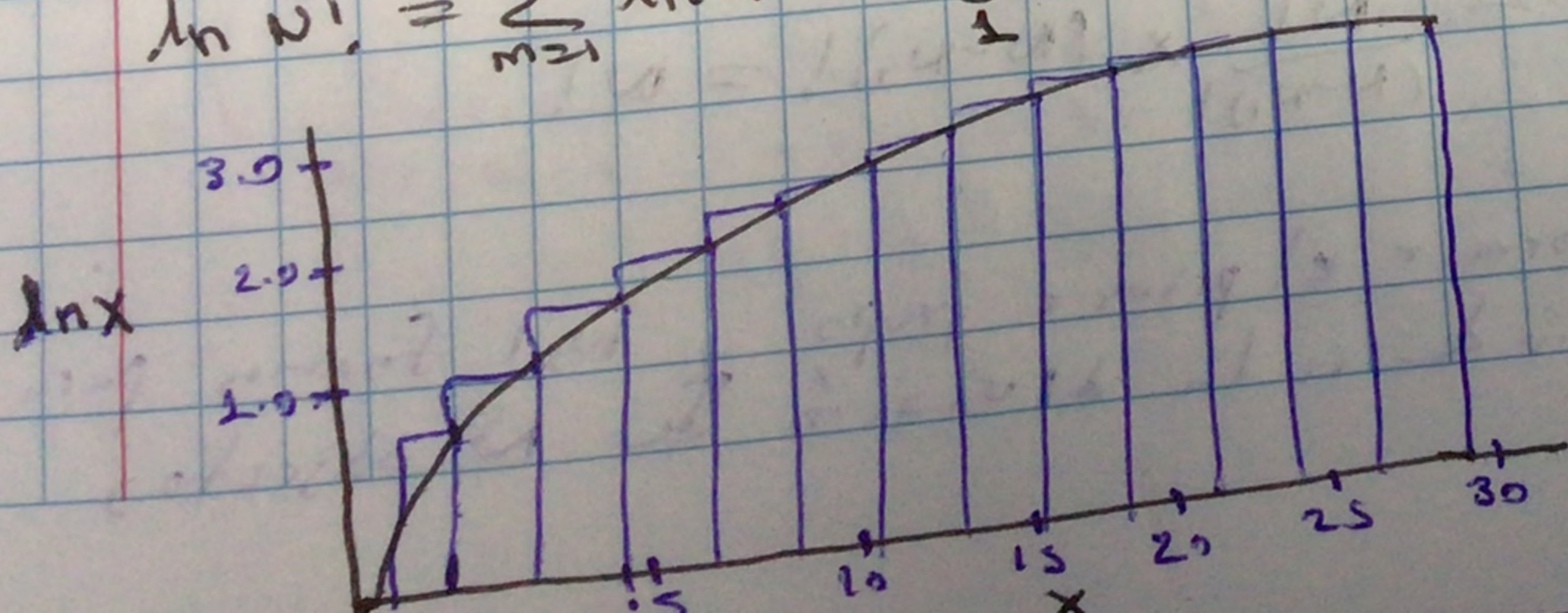
$$N! = N(N-1)(N-2) \dots (2)(1) \quad \text{y} \quad \ln N! \text{ es}$$

$$\ln N! = \sum_{m=1}^N \ln m$$

$$\ln N! = \sum_{m=1}^N \ln m \approx \int_1^N \ln x dx = N \ln N - N \quad (N \text{ grande})$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N + \ln(2\pi N)^{1/2}$$

(Aproximación más refinada de Stirling's)



Si la variable aleatoria U es continua (más discreta), entonces $p(u)du$ es la probabilidad de que la variable aleatoria U caiga entre u y $u+du$. La media de alguna función de U es,

$$\overline{f(u)} = \int f(u)p(u)du \quad ; \text{ los límites de esta integral son del rango de } U.$$

Distribución Gaussiana

Es la más importante función de distribución continua.

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

σ^2 : es la varianza y controla la anchura de esta distribución.
 $\lim \sigma \rightarrow 0 \Rightarrow p(x)$ se hace una función delta.

Aproximación de Stirling's

La aproximación asintótica de $\ln N!$ se le llama aproximación de Stirling's.

$$N! = N(N-1)(N-2) \dots (2)(1) \quad \text{y} \quad \ln N! \text{ es}$$

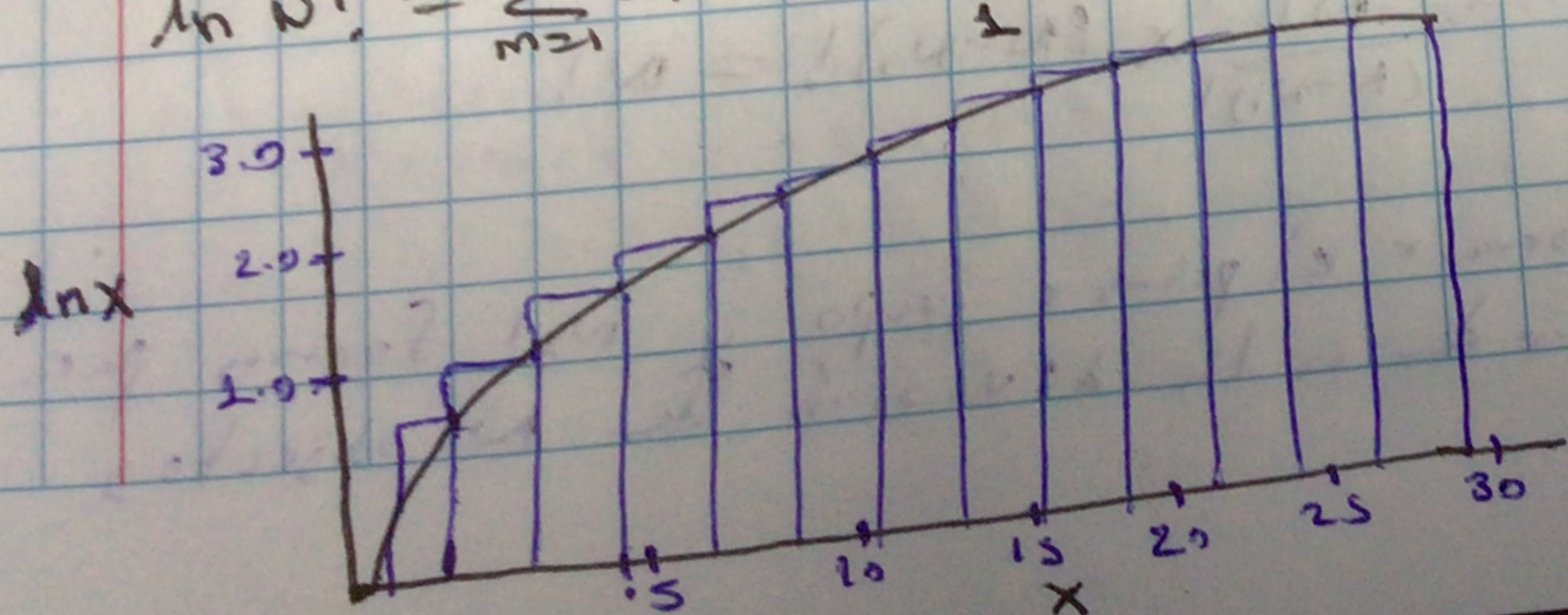
$$\ln N! = \sum_{m=1}^N \ln m$$

$$\ln N! = \sum_{m=1}^N \ln m \approx \int_1^N \ln x dx = N \ln N - N \quad (N \text{ grande})$$

(Aproximación de Stirling's)

$$\ln N! \approx N \ln N - N + \ln(2\pi N)^{1/2}$$

(Aproximación más refinada de Stirling's)



Distribución binomial y multinomial

En la división del ensemble cuántico se divide el sistema en grupos, cuando tenemos es posible dividir el sistema distinguible en grupos, tal que existen los sistemas en el primer grupo, en el segundo grupo, y así sucesivamente, tal que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$, es decir, todo el sistema es cubierto. Calculamos el número de permutaciones de N objetos distinguibles, esto es, el número de posibles arreglos diferentes de N objetos para ordenar N objetos distinguibles. Elegimos uno de los N objetos y lo colocamos en la posición primera y elegimos el objeto $(N-1)$ y lo colocamos en la segunda posición, así sucesivamente hasta que los N objetos son ordenados. Existen N elecciones para la primera posición, $(N-1)$ para la segunda y así sucesivamente para la N ésima posición. El número total de caminos de hacer esto es el producto de todas las elecciones (formas),

$$N(N-1)(N-2) \dots (2)(1) = N! \quad (\text{objetos distinguibles})$$

Calculamos el número de formas de dividir N objetos distinguibles en dos grupos, un grupo con N_1 objetos y el otro con $N - N_1$. Existen $N(N-1) \dots (N - N_1 + 1)$ formas para el primer grupo, y $N_2! = (N - N_1)!$ para formar el segundo grupo. El número total es el producto,

$$N(N-1) \dots (N - N_1 + 1) \times (N - N_1)! = \frac{N!}{(N - N_1)!} \times (N - N_1)! = N!$$

Todas las formas de $N_1!$ para formar el primer grupo y $N_2!$ formas para formar el segundo grupo corresponden a la división de N objetos

en N_1 objetos y N_2 objetos. El resultado es

$$\frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} = \frac{N!}{N_1!N_2!} \rightarrow (1)$$

La combinación de factoriales en la ec. (1) ocurre en la expansión binomial,

$$(x+y)^N = \sum_{N_1=0}^N \frac{N! x^{N-N_1} y^{N_1}}{N_1!(N-N_1)!} = \sum_{N_1, N_2}^* \frac{N! x^{N_1} y^{N_2}}{N_1!N_2!} \rightarrow (2)$$

$\frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}$ coeficiente binomial.

El asterisco (*) en la ec. (2) significa la restricción $N_1+N_2=N$.
La generalización de la ec. (1) a la división de N en r grupos,
el primero conteniendo N_1 , y así sucesivamente

$$\frac{N!}{N_1!N_2! \dots N_r!} = \frac{N!}{\prod_{j=1}^r N_j!} \rightarrow (3)$$

con $N_1+N_2+\dots+N_r=N$.

Esto es conocido como el coeficiente multinomial, dado que
este ocurre en la expansión,

$$(x_1+x_2+\dots+x_r)^N = \sum_{N_1=0}^N \sum_{N_2=0}^N \dots \sum_{N_r=0}^N \frac{N! x_1^{N_1} \dots x_r^{N_r}}{\prod_{j=1}^r N_j!} \rightarrow (4)$$

el asterisco significa la restricción,
 $N_1+N_2+\dots+N_r=N$

Métodos de multiplicadores de Lagrange

Maximamos la ec. (3) con la ligadura $x_1 + x_2 + \dots + x_r = \text{constante}$.
 Esto se resuelve maximizando la función de varios (d muchas) variables $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ cuando las ~~variables~~ ^{variables} son conectadas por las otras ecuaciones, decir $g_1(x_1, \dots, x_r) = 0$, $g_2(x_1, \dots, x_r) = 0$, etc. Esto se resuelve por el método de multiplicadores indeterminados de Lagrange. Si no existieran restricciones, $g_3(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$, el máximo de $f(x_1, \dots, x_r)$ sería

$$\delta f = \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_0 \delta x_j = 0 \rightarrow (5)$$

(5) : la ecuación se reduce a cero si cuando las r derivadas parciales son evaluadas en el máximo (o mínimo) de f .

Si tenemos otra relación entre las x 's, tal que $g(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$,

$$\delta g = \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right)_0 \delta x_j = 0 \rightarrow (6)$$

Esta ecuación surge como una ligadura (restricción) que δx_j debe satisfacer, haciendo una de ellas depender sobre las otras $(r-1)$. En el método de Lagrange, una multiplica la ec. (6) por un parámetro decir λ , y suma el resultado a la ec. (5),

$$\sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)_0 \delta x_j = 0 \rightarrow (7)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_0 - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right)_0 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, r \rightarrow (8)$$

Combinando estas $(r-1)$ ecuaciones eligiendo a λ , tenemos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \quad \text{para todos } j. \rightarrow (a)$$

Teniendo varias restricciones $g_1(x_1, \dots, x_r)$, $g_2(x_1, \dots, x_r)$, ... se introducen multiplicadores de Lagrange para cada una, $g_i(x_1, \dots, x_r)$ y se procede

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} - \dots = 0 \rightarrow (10)$$

Distribución binomial para grandes números
 Encontrando el valor de N_1 para el cual $f(N_1)$ alcanza su máximo valor,

$$f(N_1) = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}$$

Usando la aproximación de Stirling's
 $\frac{d \ln f(N_1)}{d N_1} = 0$, a ser localizado en $N_1^* = N/2$

Expandiendo $\ln f(N_1)$ en este punto, la expansión de Taylor es,

$$\ln f(N_1) = \ln f(N_1^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \ln f(N_1)}{d N_1^2} \right)_{N_1=N_1^*} (N_1 - N_1^*)^2 + \dots \rightarrow (11)$$

El término lineal es ignorado, dado que la primera derivada de $\ln f(N) = 0$
 Ignorando términos más altos en la ec. (11) se obtiene la forma de una curva Gaussiana,

$$f(N_i) = f(N_i^*) \exp \left\{ -\frac{2(N_i - N_i^*)^2}{N} \right\}, \rightarrow (12)$$

comparando con la función Gaussiana,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - x^*)^2}{2\sigma^2} \right\} \rightarrow (13)$$

- La desviación estándar es del orden de $N^{1/2}$.
- Ec. (12) función bell-shaped centrada en $N_i^* = N/2$, anchura $\sim N^{1/2}$.

El método de términos máximos sobre condiciones al logaritmo de la suma es esencialmente igual al logaritmo del término máximo de la suma.

$$S = \sum_{n=1}^M T_n \quad \text{donde } T_n > 0 \text{ para todo } n.$$

S es más grande del término más grande, decir T_{\max} , y menor que producto del número de términos y el valor del mayor término, es decir,

$$T_{\max} \leq S \leq M T_{\max}$$

T_{\max} será $O(e^M)$
(Mecánica Estadística)

$$\ln T_{\max} \leq \ln S \leq \ln T_{\max} + \ln M$$

M grande $\Rightarrow \ln M$ es despreciable en respecto al mismo M , y $\ln S$ es acotado de arriba y abajo por $\ln T_{\max}$,

$$\boxed{\ln S = \ln T_{\max}} \quad \text{para } M \text{ grande}$$

1-3 Remembering that the potential energy is given by

$$V(x) = - \int_0^x F(F) dE = \frac{1}{2} kx^2$$

for a simple harmonic oscillator, derive an expression for the total energy as a function of time. Discuss how the kinetic and potential energy behave as a function of time.

Solucion:

Sistemas que $a = -\omega^2 y$

$$F = Qm = -m\omega^2 y$$

$\Rightarrow W = Fdy \cos 180^\circ$ porque el desplazamiento y la aceleración están en

direcciones inversas

$$\Rightarrow W = \int -m\omega^2 y dy = m\omega^2 \frac{y^2}{2}$$

$$y = A \sin(\omega t \pm \theta) \Rightarrow W = m\omega^2 \frac{A^2}{2} \sin^2(\omega t \pm \theta)$$

Recordemos que la energía potencial es el trabajo realizado almacenado

$$\Rightarrow V(x) = W = m\omega^2 \frac{A^2}{2} \sin^2(\omega t \pm \theta)$$

Ahora

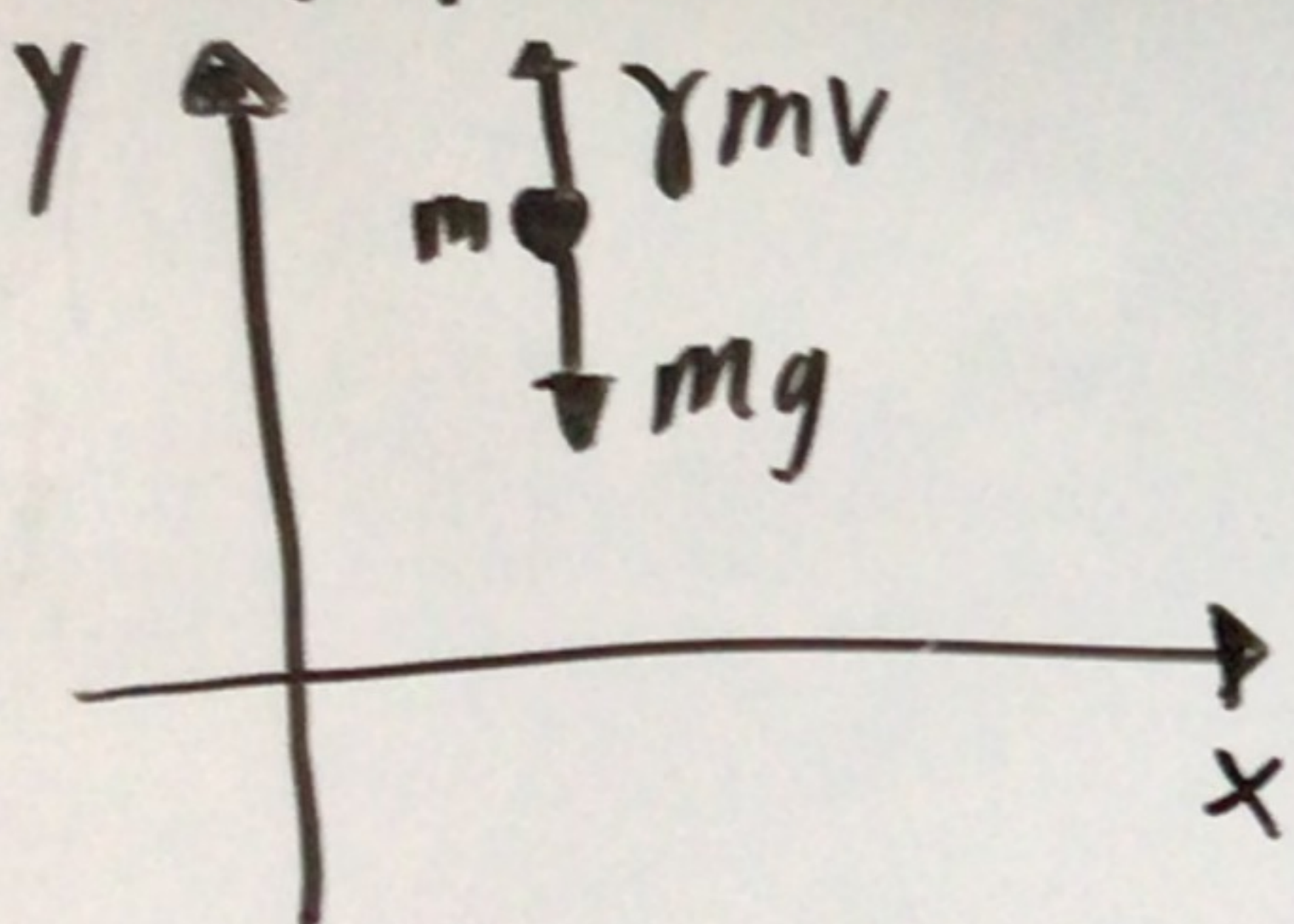
$$K(x) = m\omega^2 \cos^2(\omega t \pm \theta)$$

$$\Rightarrow E = V(x) + K(x) = m\omega^2 \frac{A^2}{2} \cos^2(\omega t \pm \theta) + m\omega^2 \frac{A^2}{2} \sin^2(\omega t \pm \theta)$$

$$= m\omega^2 \frac{A^2}{2} = \text{Constante}$$

\therefore La energía total del sistema es constante y varía entre toda la potencial y toda la cinética en función del tiempo

1.1 Resuelva la ecuación de movimiento de un cuerpo de masa m arrojado desde una altura h . Asuma que existe una resistencia viscosa sobre el cuerpo que es proporcional a v y en la dirección opuesta a la velocidad del cuerpo. (Siendo la constante de proporcionalidad γ). Resuelva para la llamada velocidad terminal, es decir, la velocidad límite cuando $t \rightarrow \infty$.



$$\sum F = mg - \gamma mv$$

$$ma = mg - \gamma mv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \gamma v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{g - \gamma v} = dt$$

Integramos..

$$\int \frac{dv}{g - \gamma v} = \int dt$$

$$-\frac{1}{\gamma} \ln |g - \gamma v| = t + c$$

si la dirección + es ↓, $\frac{dv}{dt} > 0$

$$\Rightarrow g - \gamma v = ce^{-\gamma t}$$

$$v = \frac{g - ce^{-\gamma t}}{\gamma}$$

Obtenemos el valor de la cte. $c \dots \gamma(0)$

$$v(0) = 0 = \frac{g - ce^{-\gamma(0)}}{\gamma} = \frac{g - c}{\gamma}$$

$$\Rightarrow g = c$$

$$\begin{aligned} \therefore v(t) &= \frac{g - ge^{-\gamma t}}{\gamma} \\ &= \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que la vel. terminal es...

$$\begin{aligned} v(\infty) &= \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\infty}) \\ &= \frac{g}{\gamma} \end{aligned}$$

Deriva la ecuación de estado termodinámico

$$\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right) - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -p$$

De la 1^{ra} ley de la termodinámica tenemos

$$du = T ds - p dv \quad ; \quad \text{con } u = E$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p$$

De las ecuaciones de Maxwell tenemos $\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \Rightarrow \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_T - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -p$$

2.28 - Derive the thermodynamic equation

$$C_p - C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Utilizamos las definiciones de los calores específicos

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$$

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

$S =$ Entropía

Por la primera ley de la termodinámica:

$$dU = Tds - pdv$$

Usando la definición de C_p y derivando a S respecto de T llegamos a

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T \partial V} \right)_S$$

Tenemos entonces que:

$$C_p - C_v = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T \partial V} \right)_S \cdot T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$C_p - C_v = T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right]$$

Usando el hecho $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_S$:

$$C_p - C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

1-11

Para una partícula moviéndose en la tercera dimensión bajo la influencia del potencial esférico simétrico $U = U(r)$.

Escribe el Lagrangiano y la ecuación de movimiento en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) .

Demuestre que $H = K + U$; con

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L \quad \text{Para este potencial}$$

Solución

Para coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) (una partícula moviéndose en una esfera)

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)}_T - V(r, \theta, \phi)$$

Para $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$

- Calculando para r : $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2} m (2\dot{r}) = m\dot{r}$
- Calculando para θ : $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m (2r^2 \dot{\theta}) = m r^2 \dot{\theta}$
- Calculando para ϕ : $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2} m (2r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$

$\Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$ \Rightarrow Sustituyendo en T de nuestro Lagrangiano

$\Rightarrow H = p_r \dot{r} = L \Rightarrow H_r = \frac{2 p_r^2}{m}$

$\Rightarrow H_\theta = \frac{m r^2 p_\theta^2}{2 m^2 r^4} = \frac{p_\theta^2}{2 m r^2}$

$\Rightarrow H_\phi = \frac{2 p_\phi^2}{m r^2} = \frac{2 \sin^2 \theta p_\phi^2}{m r^2}$

Nuestra ecuación de movimiento

$$L = \frac{2 p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{2 m r^2} + \frac{2 \sin^2 \theta p_\phi^2}{m r^2} - V(r, \theta, \phi)$$

1.25

Derive una expresión para la densidad de estados (continua) tridimensional para un gas ideal bidimensional.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi(x, y) = \psi_x(x) \psi_y(y)$$

$$\frac{1}{\psi_x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\psi_y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 = 0$$

$$\frac{1}{\psi_x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2$$

$$\frac{1}{\psi_y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k^2$$

$$\psi = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

$$k_x = \frac{n\pi}{r}, \quad k_y = \frac{n\pi}{r}, \quad ; n = \pm 1, 2, \dots$$

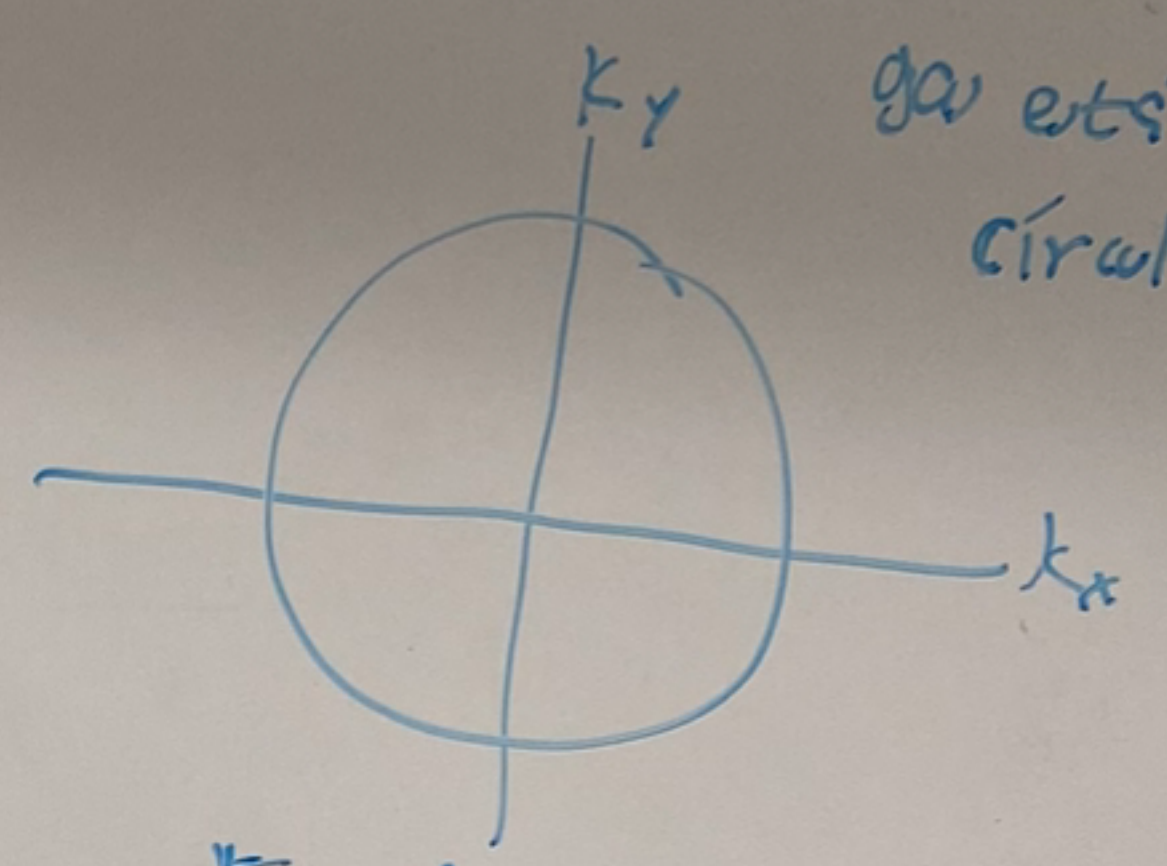
$$N(E) \frac{A}{A'} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r^4}{2\pi} = \frac{m^2 E^2}{4\pi \hbar^4}$$

$$\frac{dN}{dE} = \frac{-m^2 E}{2\pi \hbar^4}$$

$$g(E) = \frac{\frac{mE}{\pi \hbar^4}}{\frac{\pi r^2}{1}} = \frac{mE}{\pi \hbar^4 r^2} = \frac{2m^2 E \hbar^2}{\pi \hbar^4 2mE} = \frac{mE}{2\pi \hbar^3}$$

$$n(E) = \frac{g(E)}{4\pi^2 \hbar^2} = \frac{mE}{8\pi \hbar^3}$$

Sugerencia que el gas está en un círculo



$$r = k$$

$$A' = \frac{\pi}{r} \frac{\pi}{r} = \frac{\pi^2}{r^2}$$

1.15 Consider the rotation of a diatomic molecule fixed internuclear separation l and masses m_1 and m_2 . By employing center of mass and relative coordinates, show that the rotation kinetic energy can be written in spherical coordinates as

$$\frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

and from this derive the rotational Hamiltonian:

$$H_{\text{rot}} = \frac{1}{2I} \left(P_{\theta}^2 + \frac{P_{\phi}^2}{\sin^2 \theta} \right)$$

in these equations, $I = \mu l^2$, where μ is the reduced mass.

Sol. Representando cualquier punto en coord. esféricas por (r, θ, ϕ) y un vector desplazamiento $d\vec{s}$, está dado por:

$$d\vec{s} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad ; \quad \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi} : \text{Vectores Unitarios}$$

ent. la velocidad será $v = \frac{d\vec{s}}{dt}$ tal que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + \frac{d}{dt} (r d\theta) \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}$$

Como la separación internuclear $r = l$ y es fijo, ent. $\dot{r} = 0$

1-15 continuación

tal que $\vec{v} = l \dot{\theta} \hat{e} + l \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}$, ent. escribiendo la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} m \left[\sqrt{l \dot{\theta} \hat{e} + l \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}} \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)$$

$$; K = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$$

$$\text{donde } |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Por tanto

$$K = \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)$$

①

El movimiento de rot. de la energía potencial solo depende de la coordenada r . (r const.). Ent.

$$U = \text{Cero o const.}$$

U : Energía potencial

El Hamiltoniano está dado por:

$$H = K + U = K + \text{cero o const.}$$

Dado que el Hamiltoniano es una función de P_θ , P_ϕ y P_r :

$$P_\theta = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \quad \text{y} \quad P_\phi = \frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}}$$

$$P_\theta = \frac{1}{2} I (2\dot{\theta})$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{I}$$

$$P_\phi = \frac{1}{2} I (2\dot{\phi} \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{I \sin^2 \theta}$$

sust. en ①

$$K = \frac{1}{2} I \left[\left(\frac{P_\theta}{I} \right)^2 + \left(\frac{P_\phi}{I \sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta \right]$$

$$\therefore H_{\text{rot}} = \frac{1}{2I} \left[P_\theta^2 + \frac{P_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right]$$

136

Datos del problema.

Nitrometano

* Punto de ebullición 244.7°K

* Punto de fusión 3319 cal/mol .

* Punto de evaporación a 298.0°K es 9147 cal/mol

Calcule la ley de la entropía de CH_2NO_2 a 298.1°K y a 1 atm . (Asuma un gas ideal.)

sol

Partiendo de la ecuación de la entropía.

$$S = \int C_p \frac{dT}{T} - nR \ln(P) + S_0 \quad (*)$$

donde $C_p = 25.35$ y $P = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ pa}$.

De (*) despejamos S_0

$$\rightarrow S - S_0 = C_p \int \frac{dT}{T} - nR \ln(P) \Rightarrow \Delta S = C_p \ln(T) - nR \ln(P)$$

$$= (25.35) \ln(300) - (1)(8.314) \ln(101325)$$

$$= 144.6 - 95.85 = 48.78$$

$$\therefore \Delta S = 48.78 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Show that the energy of a free particle confined to a cube of length a are given by

$$E = \frac{h^2}{8ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots$$

Sol...

El potencial está dado por $V(x, y, z) = 0$ donde $0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a$
 $\Rightarrow V(x, y, z) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$

De acuerdo a la ec. de Schrödinger

$$-\frac{h^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] + V(x, y, z) \psi = E \psi$$

Podemos escribir $E = E_x + E_y + E_z$, $\psi = \psi_x(x), \psi_y(y), \psi_z(z)$. Dado que el potencial $V(x, y, z)$ es independiente, separamos las variables

$$-\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} = E_x \psi_x \dots (1)$$

$$-\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} = E_y \psi_y \dots (2)$$

$$-\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} = E_z \psi_z \dots (3)$$

Las ec. (1), (2) y (3) son equivalentes al problema de una caja unidimensional. Entonces la energía de una partícula en una caja se describe como

$$E = \frac{h^2 n^2}{8ma^2}$$

$$E_x = \frac{h^2 n_x^2}{8ma^2}, \quad E_y = \frac{h^2 n_y^2}{8ma^2}, \quad E_z = \frac{h^2 n_z^2}{8ma^2}$$

$$\Rightarrow E = E_x + E_y + E_z$$

$$\therefore E = \frac{h^2}{8ma^2} [n_x^2 + n_y^2 + n_z^2]$$

Calculate the energy eigenvalues of a particle confined to a ring of radius a .

La ec. de Schrödinger para una partícula libre confinada en un anillo es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi \dots (1)$$

Para un anillo unidimensional de radio a la función de onda depende de una coordenada angular ϑ .

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{d\vartheta^2}$$

de la ec. (1) reescribimos: $-\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{d^2 \psi(\vartheta)}{d\vartheta^2} = E \psi(\vartheta) \dots (2)$

La energía cinética de una partícula que rota en el plano x, y , se puede expresar como:

$$E = \frac{L_z^2}{2I}$$

donde L_z es el componente z del momento angular

$$L_z = -\hbar \frac{d}{d\vartheta}$$

$$I = ma^2$$

De la ec. (2) podemos deducir que: $\frac{d^2 \psi(\vartheta)}{d\vartheta^2} + \frac{2ma^2 E}{\hbar^2} \psi(\vartheta) = 0 \dots (3)$

$$\psi''(\vartheta) + n^2 \psi(\vartheta) = 0 \dots (4) \quad n^2 = \frac{2ma^2 E}{\hbar^2}$$

Una sol. posible para (4) es $\psi(\vartheta) = C e^{in\vartheta}$

Para que esta sol. sea aceptable, está debe ser un valor singular como ϑ incrementando por múltiplos de 2π , los cuales representan el mismo punto en el anillo

$$\psi(\vartheta + 2\pi) = \psi(\vartheta)$$

$$e^{in(\vartheta + 2\pi)} = e^{in\vartheta}$$

esto requiere que $e^{2\pi in} = 1$

que solo es posible cuando n es un entero

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Los eigenvalores de energía del anillo

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8I}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$





Resolver la ec. de mov. de 2 masas m_1 y m_2
 Conectadas por un resorte armonico con fuerza cont. k

E. Cinetica $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$ } Se restan

E. Potencial $U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - l_0)^2$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - l_0)^2 \right)$$

Aplicando ecu Lagrange $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1 - l_0) \Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)$$

Lagrangiano en función de x y x_G Por cambio de variable
 $x = x_2 - x_1 - l_0$ $x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

Se reescribe $x_1 = x_G - \frac{m_2 (x - l_0)}{m_1 + m_2} \dot{x}$

$$x_2 = x_G + \frac{m_1}{m_2 + m_1} \dot{x}$$

Llevando esto a la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_G^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{x}^2$$

Para el potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$

$$\therefore \text{Lagrangiano } \mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_G^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{x}^2$$

• Ec. mov para $x_G \Rightarrow P_G = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_G} = (m_1 + m_2)\dot{x}_G$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_G}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_G$$

$$y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} = -kx$$

Lo queda $\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow x_G = x_{G0} + v_{G0}t$

la ley del oscilador armónico $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$

$$\therefore x = C_1 \cos(\omega t) + C_2(\omega t)$$

1.13. Start with Lagrange's equations in Cartesian coordinates

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Show that by transforming Lagrange's equations from $x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}$ as independent variables to $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3$ we get

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_1}$$

Tenemos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \quad \text{y} \quad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}$$

Derivamos usando regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)$$

$\searrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1}$$