El método de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta tienen la exactitud del esquema de la serie de Taylor sin necesitar del cálculo de derivadas superiores. Existen muchas variaciones, pero todas ellas se pueden ajustar a la forma general de la ecuación,

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) * h$$

donde

$\phi(x_i, y_i, h)$: es la función de incremento y puede interpretarse como el promedio de la pendiente sobre el intervalo.

ϕ lo podemos escribir como,

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \cdots + a_n k_n$$

a's : son constantes

k's se pueden escribir como,

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

$n = 2$ tenemos el método de Runge-Kutta de 2do orden.

El método de Runge-Kutta de segundo orden (es cuando $n=2$)

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \phi(x_i, y_i, h) * h \\ \phi &= a_1 k_1 + a_2 k_2 \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \end{aligned}}$$

Recordando que la serie de Taylor de 2do orden para y_{i+1} en términos de y_i y $f(x_i, y_i)$ se escribe como,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) * h + f'(x_i, y_i)\frac{h^2}{2!}$$ (Serie de Taylor)

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) * h + \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] * \frac{h^2}{2}}$$ (Serie de Taylor) → ec. (*)

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 k_1 + a_2 k_2] * h$$, expandemos a $k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$ en la serie de Taylor a segundo orden,

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)$$

sustituimos este resultado y el valor de k_1,
$k_1 = f(x_i, y_i)$, en

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 \underbrace{k_1}_{f(x_i,y_i)} + a_2 k_2] * h,$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 f(x_i, y_i) * h + a_2 h \left[f(x_i,y_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} \underbrace{k_1}_{f(x_i,y_i)} h \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

agrupo términos,

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + [a_1 f(x_i,y_i) + a_2 f(x_i,y_i)] h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \right] h^2 + \theta(h^3)}$$

falta conocer los valores de a_1 y a_2, comparo con la expansión en Taylor (ec. (*)),

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h^2}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} &= \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

Tenemos 4 incognitas y 3 ecuaciones, se tiene que tener el valor de una incógnita para determinar el valor de las otras variables (3 variables)

Suponemos que conocemos el valor de a_2,

$$a_1 = 1 - a_2$$

$$p_1 = \frac{1}{2a_2}$$

$$q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

"El método de Ralston ($a_2 = 2/3$)"

Escogiendo $a_2 = 2/3$ proporciona un límite mínimo en el error de truncamiento de los algoritmos de Runge-Kutta de segundo orden.

$$a_1 = 1/3 \quad y \quad p_1 = q_{11} = 3/4$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}hk_1\right)$$

"El método de Runge-Kutta de tercer orden"

Se obtiene con $n = 3$ para determinar las k_1, k_2 y k_3.

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\right]h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2)$$

"El método de Runge-Kutta de cuarto orden"

Este método es el más popular y usado para resolver las ecuaciones.

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

EJEMPLO 25.9 Solución de sistemas de EDO usando el método de Euler

Planteamiento del problema Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método de Euler, suponiendo que en $x = 0$, $y_1 = 4$ y $y_2 = 6$. Integre hasta $x = 2$ con un tamaño de paso igual a 0.5.

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1 \quad \frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

Solución Se implementa el método de Euler para cada variable como en la ecuación (25.2):

$$y_1(0.5) = 4 + [-0.5(4)]0.5 = 3$$

$$y_2(0.5) = 6 + [4 - 0.3(6) - 0.1(4)]0.5 = 6.9$$

Observe que $y_1(0) = 4$ se emplea en la segunda ecuación en lugar de $y_1(0.5) = 3$ calculada con la primera ecuación. Procediendo de manera similar se tiene:

x	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3	6.9
1.0	2.25	7.715
1.5	1.6875	8.44525
2.0	1.265625	9.094087

EJEMPLO 25.6 Comparación de varios esquemas RK de segundo orden

Planteamiento del problema Utilice los métodos de punto medio [ecuación (25.37)] y el de Ralston [ecuación (25.38)] para integrar numéricamente la ecuación (PT7.13):

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$, usando un tamaño de paso de 0.5. La condición inicial es $x = 0$, $y = 1$. Compare los resultados con los valores obtenidos usando otro algoritmo RK de segundo orden: el método de Heun sin iteración del corrector (tabla 25.3).

Tabla 25.3 Comparación de los valores verdadero y aproximado de la integral de $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$, con la condición inicial de que $y = 1$ en $x = 0$. Los valores aproximados se calcularon por medio de tres versiones de los métodos RK de segundo orden, con un tamaño de paso de 0.5.

		Heun		Punto medio		RK Ralston de segundo orden	
x	$y_{\text{verdadero}}$	y	$\lvert\varepsilon_t\rvert$(%)	y	$\lvert\varepsilon_t\rvert$(%)	y	$\lvert\varepsilon_t\rvert$(%)
0.0	1.00000	1.00000	0	1.00000	0	1.00000	0
0.5	3.21875	3.43750	6.8	3.109375	3.4	3.277344	1.8
1.0	3.00000	3.37500	12.5	2.81250	6.3	3.101563	3.4
1.5	2.21875	2.68750	21.1	1.984375	10.6	2.347656	5.8
2.0	2.00000	2.50000	25.0	1.75	12.5	2.140625	7.0
2.5	2.71875	3.18750	17.2	2.484375	8.6	2.855469	5.0
3.0	4.00000	4.37500	9.4	3.81250	4.7	4.117188	2.9
3.5	4.71875	4.93750	4.6	4.609375	2.3	4.800781	1.7
4.0	3.00000	3.00000	0	3	0	3.031250	1.0

EJEMPLO 25.8 Comparación de los métodos de Runge-Kutta

Planteamiento del problema Con los métodos RK desde primero hasta quinto orden resuelva

$$f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

con $y(0) = 2$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$ con diferentes tamaños de paso. Compare la exactitud de los diferentes métodos para la estimación en $x = 4$, basándose en la respuesta exacta a cinco decimales, $y(4) = 75.33896$.

EJEMPLO 25.9 Solución de sistemas de EDO usando el método de Euler

Planteamiento del problema Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método de Euler, suponiendo que en $x = 0$, $y_1 = 4$ y $y_2 = 6$. Integre hasta $x = 2$ con un tamaño de paso igual a 0.5.

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1 \quad \frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

Solución Se implementa el método de Euler para cada variable como en la ecuación (25.2):

$$y_1(0.5) = 4 + [-0.5(4)]0.5 = 3$$

$$y_2(0.5) = 6 + [4 - 0.3(6) - 0.1(4)]0.5 = 6.9$$

Observe que $y_1(0) = 4$ se emplea en la segunda ecuación en lugar de $y_1(0.5) = 3$ calculada con la primera ecuación. Procediendo de manera similar se tiene:

x	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3	6.9
1.0	2.25	7.715
1.5	1.6875	8.44525
2.0	1.265625	9.094087

EJEMPLO 25.11 Solución de sistemas de EDO con el uso de computadora

Planteamiento del problema Un programa de cómputo para implementar el método RK de cuarto orden para sistemas se puede desarrollar fácilmente con base en las figuras 25.18. Tal software es conveniente para comparar diferentes modelos de un sistema físico. Por ejemplo, un modelo lineal para un péndulo oscilante está dado por [recuerde la ecuación (PT7.11)]:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \qquad \frac{dy_2}{dx} = -16.1y_1$$

donde y_1 y y_2 = desplazamiento angular y velocidad. Un modelo no lineal del mismo sistema es [recuerde la ecuación (PT7.9)]:

EJEMPLO 25.12 Método adaptativo de RK de cuarto orden

Planteamiento del problema Utilice el método adaptativo de RK de cuarto orden para integrar $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$ desde $x = 0$ hasta 2 usando $h = 2$ y la condición inicial $y(0) = 2$. Ésta es la misma ecuación diferencial que se resolvió antes en el ejemplo 25.5. Recuerde que la solución verdadera es $y(2) \approx 14.84392$.

25.6 Solucione en forma numérica el problema siguiente, de $t = 0$ a 3:

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t^2 \quad y(0) = 1$$

Utilice el método de RK de tercer orden, con un tamaño de paso de 0.5.

25.4 Resuelva el problema siguiente con el método de RK de cuarto orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+0.6\frac{dy}{dx}+8y=0$$

donde $y(0) = 4$ y $y'(0) = 0$. Resuelva de $x = 0$ a 5 con $h = 0.5$. Grafique sus resultados.